



# Simulation du comportement mécanique des alliages de titane pour les procédés de mise en forme à froid

Benoît Revil-Baudard

## ► To cite this version:

Benoît Revil-Baudard. Simulation du comportement mécanique des alliages de titane pour les procédés de mise en forme à froid. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010. Français. NNT : 2010ENMP0017 . pastel-00526029

**HAL Id: pastel-00526029**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00526029>**

Submitted on 13 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale n°364 : Sciences fondamentales et appliquées

**Doctorat ParisTech**

**T H E S E**

**pour obtenir le grade de docteur délivré par**

**l'Ecole nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité « Mécanique Numérique »**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Benoît REVIL-BAUDARD**

le 06 Juillet 2010

**Simulation du comportement mécanique des alliages de titane  
pour les procédés de mise en forme à froid**

Directeur de thèse : **Elisabeth Massoni**

**Jury**

<b>Mme Salima BOUVIER</b> , Professeur, Robertval, Université technologique de Compiègne	Rapporteur
<b>M. Tudor BALAN</b> , Maître de Conférences - HDR , LPMM, Arts et Métiers ParisTech	Rapporteur
<b>M. Philippe BOISSE</b> , Professeur, LamCoS, INSA Lyon	Examineur
<b>M. Jérôme DELFOSSE</b> , Docteur, EADS Innovation Works	Examineur
<b>M. Patrice LASNE</b> , Ingénieur, Transvalor	Examineur
<b>Mme Elisabeth Massoni</b> , Maître de recherche , CEMEF, Mines Paristech	Directeur de thèse

**MINES ParisTech**

**Centre de Mise en Forme des Matériaux**

Rue Claude Daunesse B.P. 207, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France

**T  
H  
È  
S  
E**



# Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au CEMEF qui m'a permis d'effectuer ce travail de thèse.

Je remercie ma directrice de thèse Elisabeth Massoni qui a encadré ces travaux, tous les membres du projet OPTIMIST qui ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Je remercie Philippe Boisse de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Mes remerciements vont aussi à Salima Bouvier et Tudor Balan pour leur examen minutieux de ce travail et les remarques pertinentes, ainsi que Jérôme Delfosse et Patrice Lasne.

Une thèse ne peut être réalisée seul, c'est pourquoi je remercie toutes les personnes qui ont permis l'aboutissement de ce travail, entre autres, Marie Françoise, Sylvie et Geneviève pour le côté administratif, Suzanne, Lionel, Marc et Francis pour la partie expérimentale, Sylvie et Brigitte pour la bibliothèque, Larbi, Hicham, Esteban, Emile, et Christophe pour les discussions sur Forge3...

Merci à mes collègues de bureau pour l'ambiance joyeuse et studieuse : Rabea, Damien, MC, Kim...

Merci à toutes celles et ceux qui ont permis d'égayer les soirées, les Week End et les pauses-café durant ces années sur la cote d'Azur. Je remercie plus particulièrement Damien, Thomas, Raph, Larbi, Sabine, Franck, Hicham, Emile, Greg, Christophe, Benjamin, Noura, Maxime,...





# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Notation</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
Contexte de l'étude . . . . .	5
La mise en forme des tôles . . . . .	6
Les objectifs de la thèse . . . . .	7
Plan du manuscrit . . . . .	8
<b>I La modélisation des alliages de titane</b>	<b>11</b>
I.1 Les alliages de titane . . . . .	11
I.1.1 Généralités sur les alliages de titane . . . . .	11
I.1.2 Bref aperçu des alliages de titane . . . . .	11
I.1.3 Les alliages de l'étude . . . . .	17
I.1.4 Les phénomènes de déformation des alliages de titane- $\alpha$ . . . . .	19
I.2 De la microstructure à la modélisation numérique . . . . .	24
I.3 La modélisation macroscopique du comportement plastique . . . . .	27
I.3.1 La modélisation de la surface de plasticité . . . . .	28
I.3.2 Loi d'écrouissage cinématique . . . . .	41
I.3.3 Loi d'écrouissage isotrope . . . . .	44
I.3.4 Loi de comportement à variable interne . . . . .	48
I.4 Conclusion du chapitre . . . . .	51
<b>II La formulation du modèle continu anisotrope en grandes transformations</b>	<b>53</b>
II.1 Mécanique des grandes transformations . . . . .	54
II.1.1 Relations de base . . . . .	54
II.1.2 Décomposition élasto-plastique . . . . .	56
II.1.3 Le suivi de la transformation élasto-plastique . . . . .	57
II.2 L'environnement du modèle continu anisotrope . . . . .	59
II.2.1 Hypothèses générales . . . . .	59

II.2.2	Le suivi des axes d'anisotropie . . . . .	61
II.2.3	Le transport des grandeurs tensorielles . . . . .	65
II.3	Spécificité de la formulation anisotrope . . . . .	72
II.3.1	L'objectivité de la formulation . . . . .	72
II.3.2	La gestion incrémentale de la formulation . . . . .	75
II.4	Conclusion du chapitre . . . . .	79
<b>III</b>	<b>Implémentation numérique de la formulation anisotrope</b>	<b>81</b>
III.1	La résolution du problème mécanique dans Forge® . . . . .	82
III.2	Implémentation d'un modèle de comportement mécanique . . . . .	85
III.2.1	Mise en place de la formulation incrémentale . . . . .	85
III.2.2	Le calcul de l'incrément de contrainte . . . . .	88
III.2.3	Les modules tangents linéaire et bulle . . . . .	91
III.2.4	Pas de temps adaptatif . . . . .	93
III.3	Calcul de l'incrément de contraintes pour le critère de Hill . . . . .	96
III.4	Implémentation du critère de Cazacu . . . . .	97
III.4.1	Calcul des contraintes principales d'un tenseur . . . . .	97
III.4.2	Calcul de l'incrément de contrainte . . . . .	98
III.4.3	Calcul des dérivées du critère de Cazacu . . . . .	100
III.5	Gestion de l'écrouissage isotrope . . . . .	102
III.5.1	Intégration de la loi adoucissante . . . . .	103
III.5.2	Intégration de la dépendance au chargement pour l'écrouissage isotrope . . . . .	103
III.6	Validation de l'implémentation de la formulation anisotrope sous Forge®	106
III.6.1	Emboutissage d'un godet cylindrique isotrope . . . . .	106
III.6.2	Emboutissage d'une boîte carrée . . . . .	109
III.6.3	Emboutissage d'un godet cylindrique anisotrope dont l'anisotro- pie est modélisée par un critère de Hill . . . . .	111
III.6.4	Emboutissage retour d'un godet cylindrique . . . . .	119
III.7	Conclusion du chapitre . . . . .	121
<b>IV</b>	<b>Identification des paramètres du modèle anisotrope</b>	<b>123</b>
IV.1	Essais expérimentaux à sollicitation simple . . . . .	123
IV.1.1	Essais de traction uniaxiale . . . . .	124
IV.1.2	Test de cisaillement simple . . . . .	133
IV.1.3	Test de compression . . . . .	135
IV.2	Identification des paramètres du matériau . . . . .	136
IV.2.1	Identification du critère de plasticité . . . . .	137
IV.2.2	Identification des lois d'écrouissage . . . . .	149
IV.3	Comparaisons numériques entre les différentes procédures d'identifications	161
IV.3.1	Simulation des tests de traction uniaxiale . . . . .	161

IV.3.2 Simulation des essais de cisaillement simple . . . . .	169
IV.4 Conclusion du chapitre . . . . .	173
<b>V Mise en forme à froid des alliages de titane</b>	<b>175</b>
V.1 La mise en forme à froid de l'alliage SSAT350 . . . . .	175
V.2 Gonflage des alliages de titane . . . . .	176
V.2.1 Essai de gonflage d'alliage de titane. . . . .	176
V.2.2 Modélisation analytique de l'essai de gonflage hémisphérique . .	186
V.2.3 Simulation de l'essai de gonflage hémisphérique . . . . .	191
V.2.4 Simulation de l'essai de gonflage elliptique . . . . .	193
V.2.5 La modélisation des alliages de titane pour le gonflage . . . . .	196
V.3 Emboutissage des alliages de titane . . . . .	198
V.3.1 Emboutissage d'un godet cylindrique . . . . .	198
V.3.2 Emboutissage d'une pièce axisymétrique . . . . .	204
V.4 Conclusion du chapitre . . . . .	206
<b>Conclusion</b>	<b>209</b>
<b>A Test de cisaillement pour un matériau anisotrope élastique</b>	<b>215</b>
A.1 Orientation initiale à $0/90^\circ$ . . . . .	217
A.2 Orientation initiale à $45/135^\circ$ . . . . .	218
<b>B Détermination des déformations par corrélation d'image 3D</b>	<b>219</b>
<b>C Récapitulatif des paramètres identifiés pour les critères de plasticité et les lois d'écrouissage</b>	<b>221</b>
C.1 Critères de plasticité . . . . .	222
C.2 Lois d'écrouissage . . . . .	224
<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>



# Notation

Dans ce manuscrit, les notations utilisées sont celles de la mécanique des grandes transformations.

- représente une matrice ou un tenseur. Par souci de lisibilité l'ordre et la variance des tenseurs ne sont pas inclus dans la notation. Ces propriétés seront indiquées, s'ils apportent des informations facilitant la compréhension.
- { . } représente un vecteur, issu de la transformation de Voigt, permettant d'écrire un tenseur d'ordre deux en un vecteur de 6 composantes. On définit la relation suivante entre le tenseur et le vecteur :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix}$$

Ces deux notations sont donc équivalentes. On utilisera la notation de Voigt lors de l'implémentation de la loi de comportement dans un code éléments finis pour se conformer le plus possible à l'algorithme utilisé et simplifier les écritures.

- $\vec{\cdot}$  représente les vecteurs de dimensions 3, permettant la définition d'axe et de plan dans l'espace.



# Introduction

La mise en forme de produits minces est importante dans l'industrie, à travers les opérations d'emboutissage et d'hydroformage de tôles ainsi que de tubes. La forme finale dépend à la fois des caractéristiques intrinsèques du matériau et des conditions de l'opération de formage (procédés, vitesse des outils, force appliquée sur les outils...). Dans la suite de cette section seront définis le contexte de cette étude, une brève présentation des différents procédés de mise en forme de produits minces, et enfin le plan du manuscrit.

## Contexte de l'étude

Cette thèse s'inscrit dans le projet OPTIMIST<sup>1</sup>. Il s'agit d'un projet financé par la Fondation pour la recherche en aéronautique et espace (FRAE) dans le cadre d'une collaboration entre différents partenaires académiques et industriels :

- LPMTM : Laboratoire des Propriétés Mécanique et Thermodynamique des Matériaux, Université Paris XIII
- SYMME : Laboratoire SYstèmes et Matériaux pour la MEcatronique, Université de Savoie
- LETAM : Laboratoire d'Etude des Textures et Application aux Matériaux, Université Paul Verlaine, Metz
- CEMEF : Centre de Mise en Forme, Mines Paristech
- EADS IW : EADS Innovation Works

Ce projet est la conséquence du peu de connaissance, à la fois en terme de comportement microscopique et macroscopique des alliages de titane nouvellement employés dans l'industrie aéronautique. Historiquement, l'alliage le plus utilisé dans l'aéronautique est le TA6V, mis en forme principalement par formage superplastique et autres procédés à chaud. Les matériaux concernés par cette étude sont les alliages de titane dits

---

1. Optimisation de la mise en forme des alliages de titane



commerciallement purs. Ces derniers, de part leur récente utilisation et leurs structures cristallines, sont plus méconnus.

Le processus de fabrication des tôles de titane implique une opération de laminage. Dans un souci de réduction des coûts, cette opération se déroule désormais à froid, ce qui implique une anisotropie très marquée du matériau à la sortie du laminoir. Le but de ce projet est de définir et modéliser le comportement des alliages de titane commerciallement purs, d'une part de manière microstructurale pour comprendre les phénomènes physiques responsables du comportement mécanique, et d'autre part de manière macroscopique pour pouvoir simuler la mise en forme de tôles à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis.

Les deux principaux aspects du projet étant brièvement décrits, mon travail se focalise sur la description macroscopique du comportement et son implémentation dans un logiciel de calcul. La conception des outils nécessaires à la réalisation d'une pièce industrielle et la détermination des paramètres du procédé de formage afin de respecter un cahier des charges défini par le bureau d'étude sont facilitées par une simulation numérique fiable. Cet outil de calcul permet une réduction des temps et des coûts concernant l'établissement du protocole de formage d'une pièce, comparé aux approches empiriques actuellement basées sur une méthode essai/erreur, utilisées actuellement. L'utilisation de cette méthode demande un temps de réalisation et de mise au point des outils conséquent et une connaissance parfaite de l'art du formage par les chaudronniers. L'industrie aéronautique étant soumise à des cadences de plus en plus rapides, et la transmission des savoirs soumise à des aléas peu contrôlables, la simulation numérique peut devenir un outil très utile, laissé un peu de côté jusqu'à présent. Les qualités d'un bon outil numérique facilement utilisable par un bureau d'étude sont une prise en main facile et rapide, des prédictions fiables et des temps de calcul raisonnables.

## La mise en forme des tôles

Les procédés de formage concernés par cette étude permettent de transformer une tôle en une pièce finie par plusieurs opérations. On décrira brièvement les procédés d'emboutissage et de gonflage. Ces deux types de mise en forme se caractérisent par la déformation plastique de la tôle, celle-ci étant maintenue par un jeu d'outils, tels que la matrice et le contre flan. Dans le cas du gonflage, le produit plat est déformé par la pression du fluide injecté, tandis que dans le cas de l'emboutissage, un poinçon vient en contact de la pièce pour lui donner la forme voulue. Les principales variables d'un procédé sont les suivantes :

- le nombre de passes nécessaires pour obtenir la forme finale désirée
- la géométrie des différents outils
- les forces et les déplacements appliqués aux outils durant la phase de formage
- les conditions de lubrification entre la tôle et les outils

Les fonctionnalités de la pièce finale sont définies par le cahier des charges et ne peuvent être sujettes à modification (Résistance mécanique, à la corrosion, propriétés thermiques). Cependant, certaines variables restent flexibles pour obtenir la géométrie désirée :

- l'épaisseur initiale de la tôle
- le choix d'un matériau
- les propriétés plastiques du matériau choisi

Si tous ces paramètres sont correctement choisis, de nombreuses pièces complexes sont réalisables par une opération de formage à froid. La mise en forme à froid présente un avantage financier par rapport au formage à chaud. En revanche, les matériaux deviennent moins déformables et demande une réflexion en amont plus important sur la faisabilité de la pièce (formabilité du matériau, capacité de la presse,...)

## Les objectifs de la thèse

L'objectif final est donc d'avoir un outil permettant la simulation de formage de pièces industrielles, réalisées en alliage de titane commercialement purs. Une bonne modélisation du comportement mécanique implique la prise en compte du comportement plastique. La plasticité se caractérise par :

- un critère de plasticité, définissant dans l'espace des contraintes une surface de plasticité. Cette surface permet de fixer la limite entre le comportement élastique et élasto-plastique.
- des lois de comportement définissant l'évolution plastique du matériau selon la sollicitation appliquée.

Les phénomènes physiques guidant la déformation plastique des alliages de titanes seront exposés pour permettre une modélisation par des lois macroscopiques, issues de la littérature, afin de prédire correctement le comportement plastique. Les alliages de titane étant fortement anisotropes, le modèle mécanique doit prendre en compte les spécificités dues à ce comportement complexe. En effet, le comportement mécanique est différent selon la direction de sollicitation. La cinématique de la transformation élasto-plastique anisotrope sera définie en s'appuyant sur la théorie des grandes transformations. Des choix d'évolutions des axes d'anisotropie seront détaillés. Une fois les modèles choisis et implémentés dans un logiciel de calcul par éléments finis, les paramètres nécessaires à la caractérisation du comportement plastique des alliages de titane

seront identifiés à partir de tests expérimentaux simples, réalisés dans le cadre du projet. La prédiction de la simulation numérique obtenue pour différentes modélisations des alliages de titane sera comparée à des cartes de déformation obtenues par corrélation d'images sur des essais de mise en forme tel le gonflage. Une conclusion sur leur l'efficacité des modèles envisagés et sur la procédure d'identification des paramètres pourra être établie afin de mesurer les erreurs impliquées par l'utilisation d'une modélisation associée à une caractérisation grâce à des essais expérimentaux. La validation de la fiabilité de la solution numérique se mesurera par :

- une bonne représentation de la géométrie finale
- une bonne cartographie des contraintes et déformations plastiques équivalentes
- une valeur correcte des efforts mis en jeu sur les outils lors du formage

## Plan du manuscrit

Afin de parvenir à développer un outil de simulation fiable, la modélisation macroscopique implique la compréhension des phénomènes physiques se développant durant la déformation. Dans un premier, les alliages de titane, concernés par cette étude, seront présentés d'une manière générale. On s'intéressera ensuite à une approche microscopique en détaillant les propriétés cristallographiques, et les phénomènes mis en jeu à l'échelle microscopique lors de la déformation plastique du matériau, tels les différents systèmes de glissement actifs et le maclage. Bien que la modélisation envisagée soit macroscopique, les phénomènes issus de la science des matériaux permettent une meilleure compréhension du comportement des alliages étudiés. La modélisation à l'échelle macroscopique sera réalisée par l'utilisation de lois phénoménologiques adaptées.

La mise en place d'une formulation anisotrope élasto-plastique est décrite dans le second chapitre. La théorie des grandes déformations est utilisée pour définir la cinématique du modèle et l'évolution des axes d'anisotropie au cours de la transformation. Les hypothèses introduites seront appuyées par des calculs analytiques effectués sur le test de cisaillement simple. Ce test permet d'une manière simple de valider une formulation sur une transformation alliant déformation et rotation rigide. La cinématique, les différents repères utilisés, les transports des grandeurs tensorielles au cours de chaque incréments seront ainsi étudiés pour permettre la mise en place d'une formulation anisotrope objective, excluant ainsi du modèle tous les phénomènes non physiques pouvant perturber le calcul de l'incrément de contrainte.

La formulation anisotrope choisie sera implémentée dans un logiciel de calcul éléments finis Forge<sup>®</sup>. La résolution mixte vitesse-pression impose de travailler avec des

grandeurs déviatoriques. Un algorithme du retour radial permet le calcul de l'incrément de contrainte élasto-plastique. Cependant, pour appliquer ce dernier, les modèles de comportement choisis doivent être deux fois dérivables, ce qui, dans certains cas, impose l'utilisation de méthodes numériques pour permettre la détermination de l'incrément de contrainte. Le logiciel de calcul éléments finis utilisant un algorithme de résolution implicite, des modules tangents consistants doivent être calculés. L'implémentation de la formulation anisotrope sera validée grâce à des cas tests issus de la littérature.

Les modèles de comportement, implémentés dans le logiciel éléments finis, doivent être caractérisés. Pour ce faire, des essais ont été réalisés par les différents partenaires du projet pour constituer une base de données expérimentales, constituée à partir de tests de traction uniaxiale, de tests de compression et de tests de cisaillement. Plusieurs procédures d'identification seront mises en place afin d'étudier l'efficacité de la caractérisation en fonction des données expérimentales utilisées. Les résultats numériques de tests simples seront comparés avec des résultats expérimentaux, obtenus par des mesures de champs. Cette première comparaison permettra d'exclure les jeux de paramètres prédisant des résultats très éloignés en terme de déformations plastiques et d'évolutions géométriques.

De simples tests expérimentaux ne peuvent valider la formulation anisotrope et son identification. Pour ce faire, des essais de gonflages hémisphériques ont été exploités analytiquement pour discriminer les lois d'écrouissage identifiées sur le test de traction. Les prédictions numériques du gonflement hémisphérique ou elliptique permettront de mettre en avant la fiabilité de la modélisation choisie. Les zones de localisation de déformations plastiques seront comparées entre les résultats numériques et les cartes de déformations issues des mesures par corrélation d'images. Des simulations d'emboutissage de godet cylindrique seront effectuées pour comparer la position et la forme des cornes d'emboutissage, et d'étudier la sensibilité des critères de plasticité au jeu de paramètres utilisé. Une conclusion sur les modèles choisis et les procédures d'identification envisagées permettra d'émettre un avis sur la fiabilité de la modélisation et de son identification permettant une application industrielle de la modélisation.



# Chapitre I

## La modélisation des alliages de titane

L'étude réalisée dans cette thèse porte sur les alliages de titane. Dans cette partie, après une brève présentation générale des alliages de titane et des phénomènes physiques mis en jeu lors de la déformation plastique, on s'attardera sur les alliages de titane commercialement purs. Dans un second temps, les différents modèles permettant la simulation du comportement mécanique de ces mêmes alliages seront définis.

### I.1 Les alliages de titane

#### I.1.1 Généralités sur les alliages de titane

#### I.1.2 Bref aperçu des alliages de titane

Ce bref aperçu de l'histoire et l'utilisation des alliages de titane permet de replacer le contexte de l'étude, en partant des premiers alliages de titane développés à son utilisation croissante dans l'industrie aéronautique.

**i) Les premiers alliages de titane.** Le titane est présent dans la croûte terrestre à la hauteur de 0.6% sous forme de minerais (ilménite  $FeTiO_3$  et rutile  $TiO_2$ ). Il s'agit du quatrième métal le plus abondant après l'aluminium, le fer et le magnésium

[Lütjering07]. L'utilisation industrielle de ces alliages commence après la seconde guerre mondiale puis se poursuit dans les années 1950 par l'addition d'aluminium afin de les rendre plus résistants. La conséquence de cette découverte est l'alliage Ti-5Al-2,5Sn, utilisé pour des applications à haute température. Par la suite, d'autres alliages de titane apparaissent, tel le Ti-6Al-4V, qui reste le plus utilisé encore actuellement grâce à une meilleure résistance mécanique et une bonne résistance en sollicitations cycliques (fatigue).

**ii) Le développement de l'industrie du titane.** Le développement de l'industrie du titane peut se diviser en deux phases, la première guidée par le progrès technique entre les années 1950 et le milieu des années 1980. Après cette période, l'intérêt économique prend le pas sur la technique limitant les progrès technologiques. En effet, malgré une croissance de 25% entre les années 1990 et 1995, le marché du titane reste très instable, car fortement dominé par le secteur aéronautique et militaire. L'industrie du titane est donc soumise à de fortes fluctuations financières qui pénalisent fortement son utilisation dans les autres secteurs. Le développement de l'industrie du titane a longtemps été décidé par l'industrie militaire et aéronautique, ce qui aujourd'hui encore engendre des instabilités sur le marché financier du titane.

**iii) Les domaines d'utilisation.** Les applications des alliages de titane sont traditionnellement aéronautiques, et notamment dans les moteurs, grâce aux qualités thermiques et mécaniques de ces alliages. Cependant, les propriétés de résistance à la corrosion du titane lui confèrent des bonnes propriétés en milieux hostiles, comme les plateformes offshore. Un autre domaine d'utilisation du titane est le secteur médical, où de nombreuses prothèses et d'implants sont réalisés en alliage de titane. On retrouve plus souvent des alliages, dits alliages  $\beta$ , grâce à leurs bonnes caractéristiques mécaniques et leur résistance à la corrosion. On peut également citer de nombreuses autres applications dans le domaine sportif, tel le tennis ou le cyclisme, où son rapport poids/résistance lui confère un grand avantage comparé aux autres métaux.

**iv) Les alliages de titane et l'industrie aéronautique.** Comme vu précédemment, le secteur aéronautique est le plus grand consommateur d'alliages de titane, et son activité règle le marché financier du titane. Les pièces en Ti-6Al-4V sont le plus souvent réalisées par formage superplastique, procédé de mise en forme à chaud. Cependant, la réduction des coûts de production tend à minimiser les opérations à chaud pour privilégier les opérations de formage à froid, comme l'emboutissage ou l'hydroformage. Un changement d'alliage est donc nécessaire, et l'utilisation d'alliages dits

commerciallement purs est croissante. L'explosion des matériaux composites dans l'aéronautique pourrait laisser croire à une baisse de l'utilisation du titane dans le futur. En réalité, les alliages de titane vont voir leur utilisation croître, car les alliages d'aluminium et les fibres de carbone composant les tissus composites sont électrochimiquement incompatibles, créant un couple galvanique s'ils sont en contact. La conséquence de cette réaction chimique est l'accroissement de l'utilisation de titane, qui lui est stable au contact des fibres de carbone. Un des objectifs prépondérants de l'industrie aéronautique étant l'économie de carburant et donc le gain de masse d'un avion, on peut supposer que l'utilisation de matériau composite va continuer d'augmenter, et donc les alliages de titane vont eux aussi suivre ce mouvement.

### I.1.2.a Cristallographie du titane pur

A température ambiante, le titane pur possède une structure hexagonale compacte, que l'on nomme la phase  $\alpha$  (Fig. I.1). Les paramètres de la maille hexagonale sont  $a=0,295$  nm et  $c=0,468$ , soit un rapport  $c/a$  de 1,586, légèrement inférieur au rapport idéal, qui est de 1,633. Les plans présents dans le cristal sont exprimés en fonction des vecteurs directeurs  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  et  $\vec{c}$ . Au delà de la température de 882 °C et jusqu'à la température de fusion (environ 1670 °C), la structure du titane pur est cubique centrée (Fig. I.2), dénommée phase  $\beta$ . Le paramètre  $a$  est égal à 0,332 nm pour une température de 900 °C.

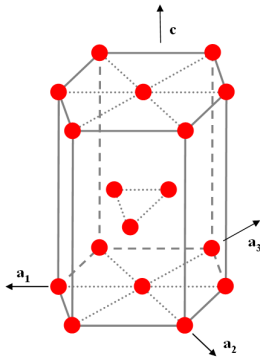


FIGURE I.1 – Maille unitaire de la phase  $\alpha$

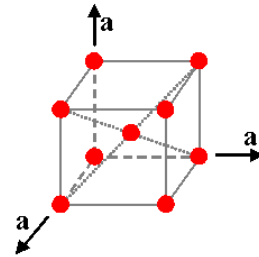


FIGURE I.2 – Maille unitaire de la phase  $\beta$

La transformation allotropique  $\beta \leftrightarrow \alpha$  (Fig. I.3), activée lors du refroidissement du titane, est caractérisée par une transformation martensitique [Guillemot00] [Jousset08]. On peut passer de la forme cubique centrée à la forme hexagonale compacte par un faible déplacement de quelques atomes, et un réarrangement de ceux-ci (Fig. I.3). Un cristal cubique centré peut donner douze orientations différentes à une structure hexagonale



compacte. Il n'y donc aucune diffusion dans la transformation allotropique, cependant, lors de refroidissements lents, un processus de germination, impliquant la diffusion, peut intervenir dans la décomposition de la phase  $\beta$ .

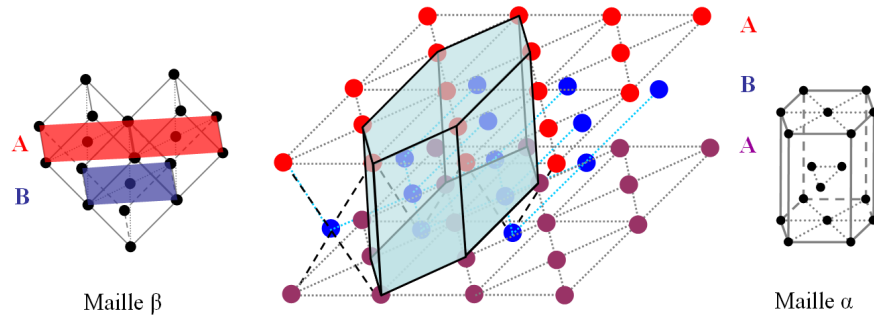


FIGURE I.3 – Transformation allotropique entre la maille cubique centrée  $\beta$  et la maille hexagonale compacte  $\alpha$ . Les empilements A et B sont représentés sur la maille cubique, respectivement en rouge et en bleu.

### I.1.2.b Les éléments d'alliages

A l'état naturel, la cristallographie du titane peut, en fonction de la température, se distinguer entre une phase  $\alpha$  et une phase  $\beta$ . La température de transition entre les deux phases est 882 °C. L'ajout d'éléments d'alliage peut modifier la structure cristallographique de quatre manières différentes, et ainsi privilégier l'apparition d'une micro-structure par rapport à une autre, comme par exemple :

- des éléments peuvent être neutres vis à vis du titane, tel le zirconium et le zinc. La structure cristallographique n'est donc pas modifiée (Fig. I.4).
- des éléments peuvent jouer le rôle de stabilisateur pour la phase  $\alpha$ , tel l'aluminium, l'oxygène, l'azote, et le carbone. On observe la création d'une nouvelle phase  $\alpha + \beta$  (Fig. I.5). Ces éléments sont appelés alphasènes.
- des éléments d'ajout peuvent stabiliser la phase  $\beta$ , par une réaction isomorphe où la phase la plus présente est la structure cubique centrée (Fig. I.6). Ceux-ci sont le vanadium, le molybdène, et le tantale, éléments d'ajouts dénommés par le terme bétagènes isomorphes.
- des éléments permettent la stabilisation de la phase  $\beta$ , par une réaction eutectique, avec l'apparition de deux nouvelles phases (Fig. I.7). On trouve parmi ceux-là le fer, le manganèse, le nickel, le cuivre ..., dénommés bétagènes eutectoïdes

Les éléments d'alliage permettent donc de définir une structure cristallographique, qui permet de classer les différentes nuances d'alliages de titane.

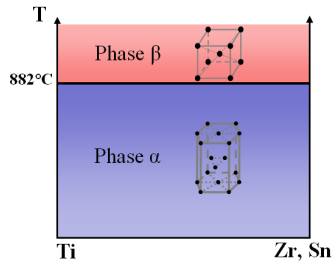


FIGURE I.4 – Diagramme de changement de phase entre le titane et les éléments neutres

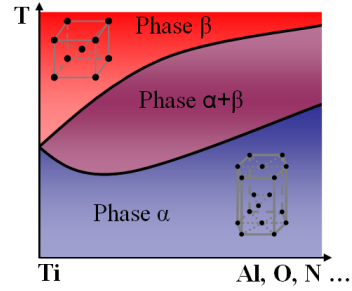


FIGURE I.5 – Diagramme de changement de phase entre le titane et les éléments alphas

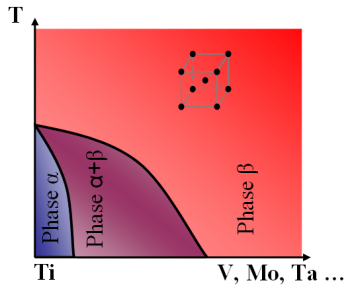


FIGURE I.6 – Diagramme de changement de phase entre le titane et les éléments bêta isomorphes

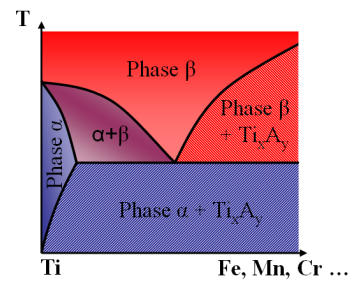


FIGURE I.7 – Diagramme de changement de phase entre le titane et les éléments bêta eutectoïdes

### I.1.2.c Les classes d'alliage de titane

On distingue trois grands types d'alliages de titane en fonction de leur composition et de la température de transformation martensitique complète  $M_s$  (Fig. I.8) :

- les alliages  $\alpha$  sont très intéressants pour une utilisation à haute température, mais peu sensibles aux traitements thermiques. Ils contiennent une forte addition d'éléments alphas. On peut distinguer les titanes dits commercialement purs, où l'on trouve en majorité du fer et de l'oxygène et les alliages  $\alpha$  avec des faibles résidus de phase  $\beta$ .
- les alliages biphasés  $\alpha + \beta$  sont composés à la fois d'éléments alphas et bêta. Leur microstructure est fortement dépendante de la composition et du mode de refroidissement. Ils offrent un bon compromis entre les propriétés mécaniques et une meilleure sensibilité aux traitements thermiques que les alliages composés principalement de phase  $\alpha$ . Cependant, ils deviennent instables au-delà d'une température de 450 ° C.
- les alliages  $\beta$  dont la majorité est composée de phase  $\beta$  métastable, obtenue par un refroidissement rapide sans précipitation de phase. Ils possèdent des caracté-

ristiques mécaniques plus élevées.

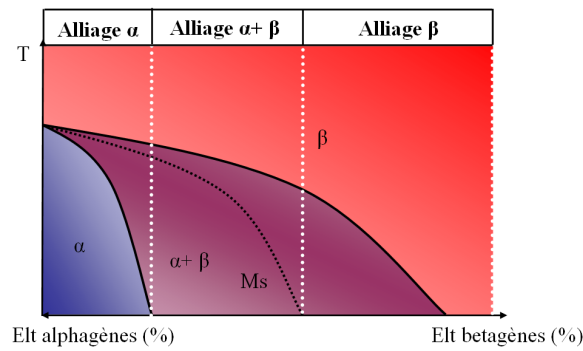


FIGURE I.8 – Classification des alliages de titane en fonction de leur composition

Le plus utilisé des alliages est le Ti-6Al-4V (alliage  $\alpha + \beta$ ), qui représente environ 50% de la production mondiale (Fig. I.9).

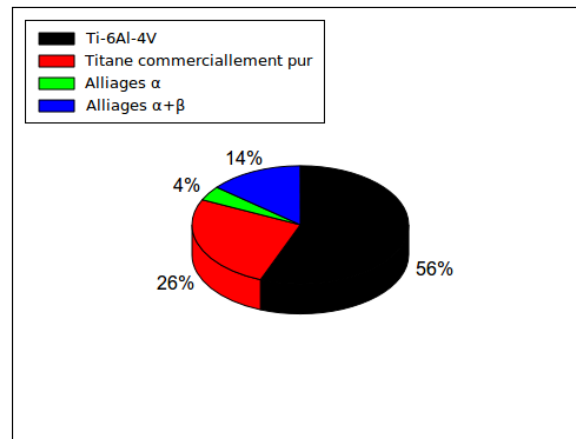


FIGURE I.9 – Répartition de l'utilisation d'alliage de titane aux Etats-Unis en 1998 [Lütjering07]

### I.1.2.d Propriétés physiques généralités

Les alliages de titane sont utilisés dans les différents domaines cités précédemment grâce à des propriétés physiques qui leur permettent de couvrir plusieurs domaines. Tout d'abord, leur rapport densité/résistance mécanique permet d'obtenir des gains de poids conséquents pour un comportement mécanique, permettant de répondre au même cahier des charges. Cependant, cet avantage est contrebalancé par un coût d'achat élevé. La température de fusion plus élevée pour le titane (aux alentours de  $1000^\circ\text{C}$ ) que l'aluminium (environ  $650^\circ\text{C}$ ), son principal concurrent pour la construction des structures

légères, lui procure un net avantage pour les applications à partir des températures avoisinant 150 ° C. La température limite d'utilisation d'un alliage de titane est d'environ 600 ° C pour les alliages les plus résistants thermiquement.

La résistance à la corrosion des alliages de titane est bien connue, mais cette propriété ne provient pas du titane intrinsèque. Celui-ci possède un potentiel oxydoréducteur de -1,63V, proche de celui de l'aluminium. Intrinsèquement, on ne peut pas considérer le titane comme un métal noble. Son excellente résistance à la corrosion dans la plupart des environnements provient d'une réaction chimique, qui crée une fine couche protectrice. Si ce film protecteur est dégradé, ce qui peut arriver en conditions extrêmes (attaque d'acide), la corrosion apparaît et le matériau se dégrade rapidement.

La résistance au feu des alliages de titane est un avantage certain pour son utilisation dans les moteurs d'avion. On peut également noter une biocompatibilité du titane, d'où son utilisation dans le domaine biomédical, avec la fabrication de prothèses et d'autres accessoires chirurgicaux.

### I.1.3 Les alliages de l'étude

Deux alliages ont été ciblés pour cette étude. Tous les deux sont des alliages de titane  $\alpha$ . Leur structure, comme entrevue précédemment, est donc principalement hexagonale compacte. Le choix de ces deux nuances est motivé par leur utilisation pour le formage des pièces de structure.

#### I.1.3.a Le titane T40

L'alliage de titane T40 est un alliage de titane de grade 2, dit commercialement pur (environ 99% de titane pur en masse). Les éléments ajoutés sont principalement le fer et l'oxygène. La composition de l'alliage est donnée dans la table [I.1](#).

C	H	O	N	Fe	Ti
0,1	0,013	0,20	0,05	0,25	Reste

TABLE I.1 – Composition de l'alliage de titane T40 commercialement pur (en % de fraction massique)

Dans les alliages commercialement purs, les propriétés mécaniques sont fortement dépendante de la fraction massique d'oxygène présent dans l'alliage. Plus cette fraction

est importante, plus la limite élastique et la contrainte à la rupture seront élevées. Au contraire, l'allongement et donc la ductilité du matériau diminuent avec la teneur en oxygène. Concernant cet alliage de titane, on obtient un comportement mécanique proche d'un acier pour un matériau deux fois plus léger. En effet, la densité de cet alliage est de  $4510 \text{ kg/m}^3$ . Au-delà de la température de transus (environ  $915^\circ$ ), la structure du matériau est une structure cubique centrée. Les propriétés élastiques de l'alliage sont un module de Young  $E$  égal à environ  $110 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu$  égal à  $0,33$ . Les données des fournisseurs indiquent une limite d'élasticité de  $351 \text{ MPa}$  dans la direction de laminage et de  $397 \text{ MPa}$  dans la direction transverse. Les contraintes à la rupture sont respectivement de  $496 \text{ MPa}$  et de  $478 \text{ MPa}$ . L'allongement maximal est proche de  $20\%$ . Dans cette étude, l'épaisseur des tôles est de  $1,6 \text{ mm}$ .

### I.1.3.b Le titane SSAT 350

Le second alliage de titane concerné par cette étude est le SSAT 350 (grade 9). Il s'agit d'une nuance, en cours de développement chez le fournisseur, annoncée comme très proche du TA3V, mais dont la structure est du quasi- $\alpha$ . Des mesures EBSD sur des échantillons de tôles réalisées au LPMTM ont permis d'estimer le pourcentage de phase  $\alpha$  ( $93,7\%$ ) et  $\beta$  ( $6,3\%$ ) [Mhenni]. On peut donc considérer que l'alliage est un alliage de type  $\alpha$  et une même modélisation pourra être utilisée pour ces deux alliages de titane. Par rapport à un titane commercialement pur, des éléments d'addition tel le vanadium et l'aluminium sont présents (Table I.2).

C	H	O	N	Fe	Al	V	Ti
0,1	0,03	0,15	0,09	0,25	2,5-3,5	2,0-3,0	Reste

TABLE I.2 – Composition de l'alliage de titane SSAT 350 (en % de fraction massique)

La température de transition entre la phase  $\alpha$  et  $\beta$  est d'environ  $935^\circ \text{ C}$ , soit légèrement supérieure à celle d'un alliage commercialement pur. Il s'agit d'un alliage de titane avec une limite élastique plus élevée (environ  $397 \text{ MPa}$  pour la direction de laminage et  $423 \text{ MPa}$  pour la direction transverse), mais légèrement moins ductile (allongement maximale de  $15\%$ ). La densité de celui-ci est de  $4480 \text{ kg/m}^3$ . L'épaisseur des tôle d'alliage SSAT 350 est, dans cette étude, de  $1 \text{ mm}$ .

### I.1.4 Les phénomènes de déformation des alliages de titane- $\alpha$

#### I.1.4.a L'élasticité de la phase $\alpha$

Le caractère anisotrope de la structure cristalline de la phase  $\alpha$  a des conséquences importantes sur le comportement élastique du titane et de ses alliages. Le module de Young peut varier entre 145 GPa, si la contrainte est appliquée selon l'axe  $\vec{c}$ , et 100 GPa, si la sollicitation mécanique est perpendiculaire à l'axe  $\vec{c}$ . Ces observations se retrouvent dans le module de cisaillement  $G$ , suivant que la contrainte de cisaillement est appliquée suivant le plan  $\{11\bar{2}0\}$  (module le plus élevé) ou suivant le plan  $\{0002\}$ . Une augmentation de la température fait décroître quasi linéairement les deux modules. Les propriétés élastiques des alliages de titane dépendent fortement de la direction de sollicitation. L'orientation des grains dans la tôle au début de la mise en forme sera donc importante et une forte inhomogénéité de la structure cristalline peut donner un matériau avec des propriétés mécaniques non homogènes en fonction de la zone d'utilisation. De plus, la maille hexagonale compacte, de par son empilement atomique est fortement anisotrope en élasticité et en plasticité.

#### I.1.4.b Systèmes de glissement dans le titane $\alpha$

Le nombre de système de glissement dans la maille hexagonale compacte est au nombre de 12. Cependant, on peut réduire ce nombre à 4 systèmes de glissement indépendants résumés dans la table I.3 et illustrés sur les figures I.10 à I.13.

Numéro	Plan	Direction de glissement	Vecteur de glissement	Illustration de Burger
1	(0002)	$\langle 11\bar{2}0 \rangle$	$\vec{a}$	figure I.10
2	$\{10\bar{1}0\}$	$\langle 11\bar{2}0 \rangle$	$\vec{a}$	figure I.11
3	$\{10\bar{1}1\}$	$\langle 11\bar{2}0 \rangle$	$\vec{a}$	figure I.12
4	$\{11\bar{2}2\}$	$\langle 11\bar{2}2 \rangle$	$\vec{c} + \vec{a}$	figure I.13

TABLE I.3 – Tableau récapitulatif des systèmes de glissement dans la structure hexagonale compacte

Les trois premiers systèmes de glissement ont pour direction de glissement le vecteur  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ . Ceux-ci sont contenus dans le plan basal. Le plan pyramidal numéro 4 permet aux cristaux de se déformer dans les trois directions de l'espace. La compacité de la maille hexagonale compacte permet de déterminer les systèmes de glissement principaux. Il est admis, hors exception, qu'un rapport  $c/a$  inférieur au rapport idéal

de 1,633 favorise le glissement prismatique. Dans le cas inverse, le plan de glissement primaire est le plan basal. Dans le cas du titane et des alliages  $\alpha$ , la compacité permet de définir le plan de glissement principal, à savoir le plan prismatique. Les glissements secondaires sont les glissements sur le plan basal et sur les plans pyramidaux.

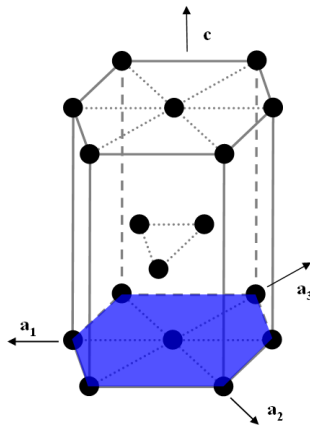


FIGURE I.10 – Glissement basal  $\{0001\}$

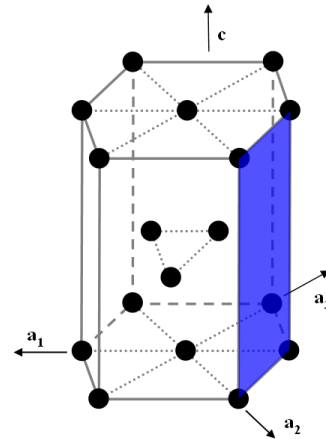


FIGURE I.11 – Glissement prismatique  $\{01\bar{1}0\}$

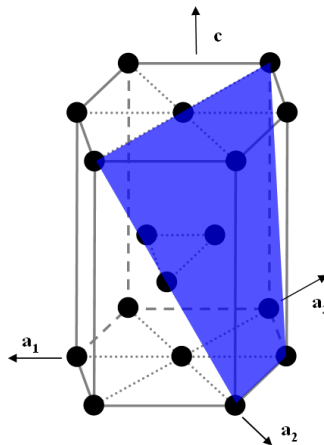


FIGURE I.12 – Glissement pyramidal de 1<sup>ère</sup> espèce  $\{01\bar{1}1\}$

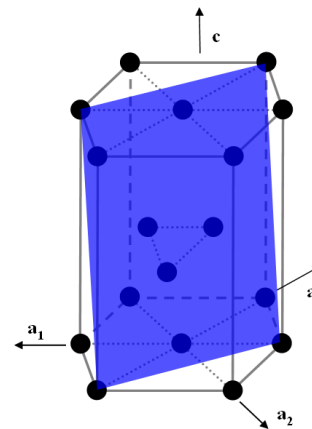


FIGURE I.13 – Glissement pyramidal de 2<sup>ème</sup> espèce  $\{11\bar{2}2\}$

Les systèmes de glissement permettent de comprendre la déformation plastique de la microstructure. Un second phénomène microstructural est très important dans la déformation. Il s'agit du maillage.

### I.1.4.c Maclage

Le maclage est la séparation d'un cristal en deux entités distinctes avec des orientations différentes. La conséquence est l'apparition de deux cristaux, né d'un même grain, avec des propriétés différentes [Kocks98]. On peut distinguer trois phénomènes permettant la naissance de macle :

- la croissance cristalline
- les transformations de phases, durant laquelle les orientations et les symétries du cristal changent. Les macles naissent donc d'une opération mettant en jeu des phénomènes thermiques.
- les sollicitations mécaniques, qui permettent la naissance des macles.

On ne se préoccupera que des macles obtenues consécutivement à des actions mécaniques. Trois modes principaux de maclage sont observés dans les alliages de titane. Les données cristallographiques des macles sont explicitées dans la table I.4 et illustrées sur les figures I.14 à I.16. Le signe de la contrainte appliquée sur le grain avant le maclage détermine la forme de la macle. Le plan de glissement principal étant le plan prismatique, le maclage va favoriser celui-ci en réarrangeant l'orientation des structures hexagonales compactes, favorisant la colinéarité entre l'axe  $\vec{c}$  et la direction de la sollicitation.

numéro	Sollicitation mécanique	Plan de maclage	Direction de maclage	2 <sup>nd</sup> plan non déformé	Illustration
1	traction	$\{10\bar{1}2\}$	$< 10\bar{1}1 >$	$\{\bar{1}012\}$	figure I.14
2	traction	$\{11\bar{2}1\}$	$< 11\bar{2}\bar{6} >$	$\{0002\}$	figure I.15
3	compression	$\{11\bar{2}2\}$	$< 11\bar{2}\bar{3} >$	$\{11\bar{2}4\}$	figure I.16

TABLE I.4 – Tableau récapitulatif des modes de maclage dans les alliages de titane [Battaini07]

### I.1.4.d Phénomènes microstructuraux sur le durcissement mécanique

Les différents phénomènes mis en jeu lors de la déformation des alliages de titane ont été présentés ci-dessus. De par sa structure cristalline, les orientations des grains ont une grande importance sur les modes de glissement et de maclage mis en jeu pour assurer la déformation appliquée. Le vecteur définissant l'orientation de la maille hexagonale compacte est l'axe  $\vec{c}$ . Battaini *et al* ont observé que le principal mode de déformation est le maclage [Battaini07] et concluent que la réorientation des cristaux par maclage est très importante et permet une plus grande déformation. Suivant l'orientation initiale dans l'échantillon, les sollicitations mécaniques appliquées pour obtenir la même déformation peuvent varier très fortement. On entrevoit bien dans ces observations le



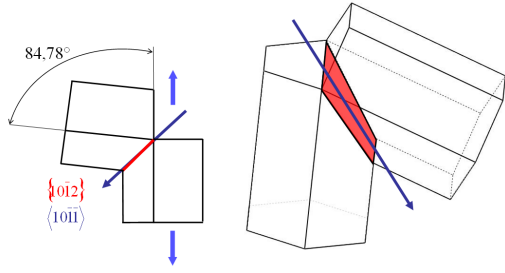


FIGURE I.14 – Maclage par sollicitation de traction

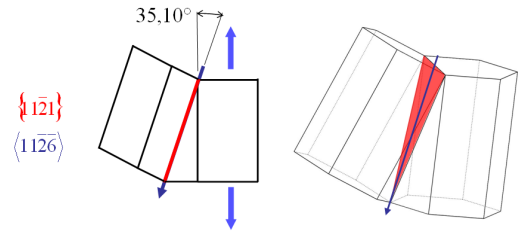


FIGURE I.15 – Maclage par sollicitation de traction

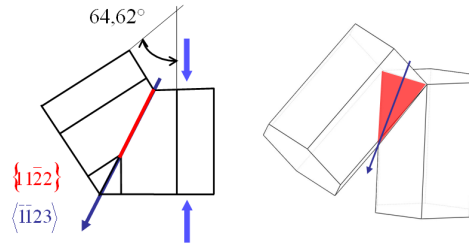


FIGURE I.16 – Maclage par sollicitation de compression

caractère anisotrope des alliages de titane, caractère qu'il faudra prendre en compte pour la modélisation macroscopique.

Dans le cadre du projet, des études microscopiques ont été menées par le LETAM de l'université Paul Verlaine de Metz [Lei]. Des échantillons de titane T40 ont été fortement déformés et des visualisations EBSD ont été exploitées. Leur conclusion sur le maclage dans les grains de ce matériau permet de comprendre comment celui-ci se déforme et l'importance de l'orientation de l'axe  $\vec{c}$  dans les modes de maclage actionnés :

- si les grains ont leur axe  $\vec{c}$  orienté dans la direction transverse, c'est-à-dire la direction perpendiculaire à la direction de laminage, aucun maclage n'est observé.
- les grains avec l'axe  $\vec{c}$  orienté dans la direction normale à la tôle subissent un maclage de compression  $\{11\bar{2}2\}$ .
- si les grains ont l'axe  $\vec{c}$  orienté dans la direction de laminage, alors le mode de maclage activé est le mode de traction  $\{10\bar{1}2\}$

On peut donc représenter les modes de maclage sur une figure de pôle orientée par (0002) en fonction de l'orientation de l'axe  $\vec{c}$  (Fig. I.4). L'apparition de maclage secondaire dans le maclage primaire est observée si l'orientation de l'axe  $\vec{c}$  de la macle est dans une position instable. Dans ce cas là, l'orientation de la seconde macle va être stable. Ainsi, dans un grain, on peut donc observer un maclage d'ordre 2, c'est-à-dire l'apparition d'un maclage primaire suivi de la création d'une seconde macle dans le même grain. L'orientation finale est largement différente de l'orientation initiale. Par

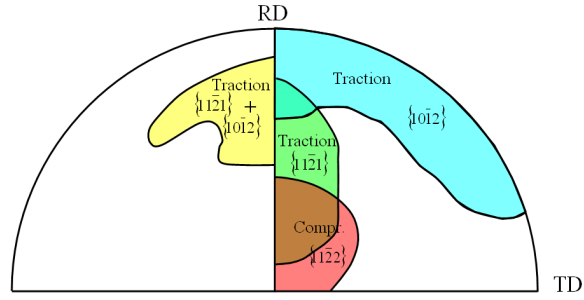


FIGURE I.17 – Activation des modes de maclage suivant l'orientation de l'axe  $\vec{c}$  de la structure hexagonale compacte

contre, aucun maclage d'ordre 3 n'est observé.

## I.2 De la microstructure à la modélisation numérique

L'étude de la microstructure d'un matériau permet la mise en évidence des phénomènes physiques responsables du comportement plastique. La cristallographie et l'étude du maillage permettent le développement de modèles analytiques ou numériques. Ces derniers se classent en plusieurs catégories selon l'échelle considérée, de l'atome à la pièce industrielle (Fig. I.18). Les grandeurs mises en jeu au cours des différentes modélisations sont fonction de l'échelle envisagée, des interactions entre les atomes au comportement supposé homogène dans la tôle.

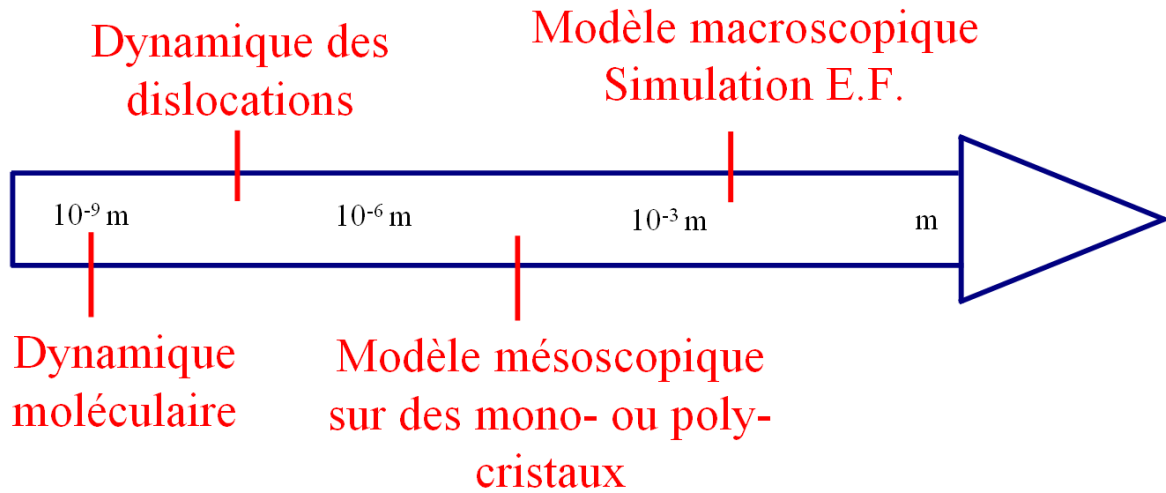


FIGURE I.18 – Les différentes échelles de la modélisation d'un comportement matériau

La dynamique moléculaire est l'étude des interactions entre les différents atomes d'une maille cristalline. À partir d'un potentiel d'interaction et de la position théorique initiale des molécules, l'intégration de l'équation de mouvement permet le suivi des particules à partir d'une situation hors équilibre. Les résultats sont fortement dépendants de la forme du potentiel utilisé, qui modélisent la répulsion entre les noyaux atomiques et la contribution des électrons (Fig. I.19). Ce dernier dépend du matériau envisagé, le zirconium étant assez bien connu [Ackland07], mais le titane très peu pour l'instant, aucun potentiel fiable n'étant validé [Raulot]. Cette modélisation permet la comparaison des caractéristiques de la maille hexagonale, des énergies mises en jeu pour la création de défauts d'empilement, et des constantes élastiques. La caractérisation de l'élasticité permet de mettre en évidence le caractère anisotrope du matériau induit par sa cristallographie.

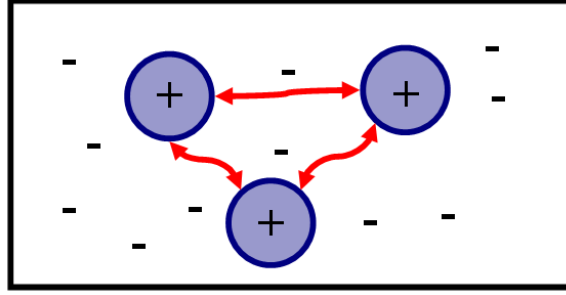


FIGURE I.19 – Interaction entre les noyaux atomiques et les électrons

La dynamique des dislocations permet la décorrélation des systèmes de glissement mis en jeu lors de la déformation plastique. Cette modélisation théorique permet la détermination des énergies d'activation des différents systèmes de glissement et permet d'établir une hiérarchie dans ces derniers [Wang09]. La dynamique des dislocations permet donc de prédire l'évolution d'une dislocation dans un grain et son influence sur le comportement plastique. La détermination des cisssions critiques pour chaque plan de glissement permet de classer les plans principaux et de confirmer les observations expérimentales. Le maillage suivant dans la maille hexagonale compacte peut être aussi étudié par la dynamique des dislocations [Monnet04]. Le titane commercialement pur est, à ce jour, très peu modélisé, les efforts scientifiques s'étant plus portés sur le zirconium.

Les cisssions critiques de glissement permettent l'utilisation de modèles polycristallins. Il s'agit donc d'une modélisation à l'échelle mésoscopique du comportement plastique, considérant un grain ou un volume élémentaire représentatif. Ces modèles permettent la détermination du comportement rhéologique global du matériau étudié et la réponse de ce dernier à des sollicitations mécaniques multiples (traction simple, cisaillement cyclique). Le modèle de Taylor [Fundenbergert97] ou des modèles auto-cohérents [Proust07] [Héripuré07] permettent la prédiction d'orientations cristallines et de courbes rhéologiques. Tous ces modèles se basent sur les cisssions critiques de glissement, déterminées soit expérimentalement, soit par la dynamique des dislocations. Les travaux existant sur les cristallographies cubiques doivent être adaptés à la maille hexagonale compacte pour permettre l'utilisation de modèle micromécanique pour les alliages de titane.

A l'échelle macroscopique, la prédiction numérique est réalisée par le biais de calcul éléments finis. Le comportement du matériau est modélisé par des lois phénoménologiques décrivant globalement la physique mise en jeu lors de la déformation plastique. Ces lois de comportement peuvent être caractérisées à partir des résultats d'une modélisation micromécanique [Rabahallah09b] ou de données issues de test expérimentaux. L'étude effectuée dans cette thèse se place à cette échelle, le but étant la caractérisation

des alliages de titane pour la mise en forme à froid. Cependant toutes les lois de comportement présentées dans la suite de ce manuscrit, sont représentatives du comportement microstructural du matériau. On ne peut, d'un point de vue numérique, utiliser une modélisation fine pour prédire le formage de tôle en un temps de calcul raisonnable. La caractérisation des alliages de titane par des lois phénoménologiques a surtout été réalisée pour l'alliage TA6V, avec notamment une modélisation de la thermodépendance du comportement [Combres88] [Gavrus96]. En revanche, la caractérisation du comportement d'alliages de titane commercialement purs n'est très peu discutée dans la littérature. La loi de Norton-Hoff est majoritairement utilisée.

La figure I.20 permet de faire le lien entre les différentes échelles de travail et notamment l'enchaînement des étapes permettant une modélisation à l'état macroscopique s'appuyant sur des modèles représentant plus finement les phénomènes physiques. L'apport de données expérimentales macroscopiques est important pour caractériser le comportement, mais aussi valider le modèle numérique. La modélisation macroscopique

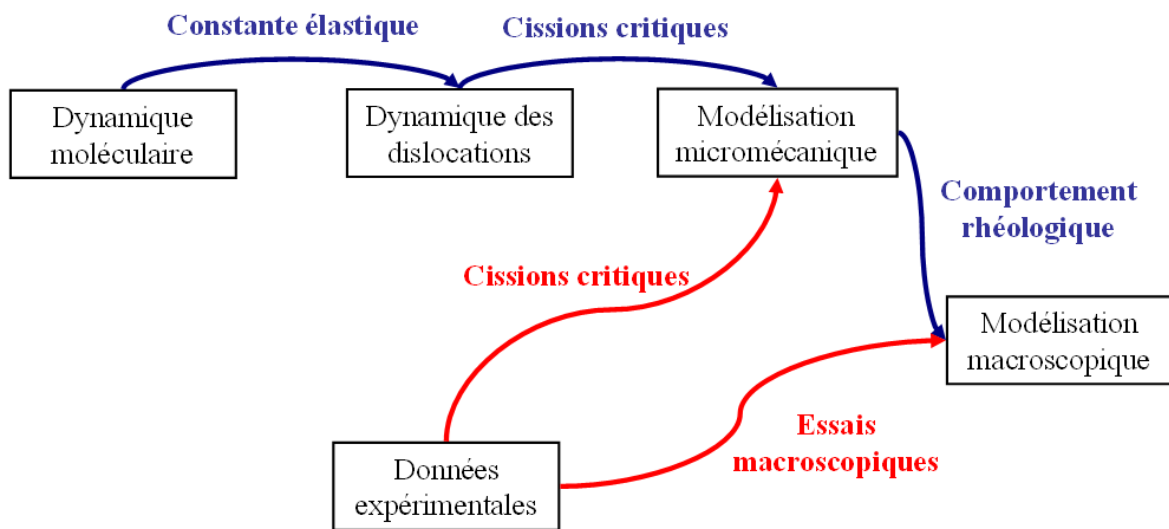


FIGURE I.20 – Les différentes échelles de la modélisation d'un comportement matériau

d'alliage de titane commercialement pur est l'objet de cette étude. Une vision mécanique du comportement des matériaux est donc présentée dans la suite de ce chapitre, sachant que le lien avec la microstructure est réalisé par les lois phénoménologiques décrites.

## I.3 La modélisation macroscopique du comportement plastique

Après avoir détaillé les mécanismes mis en jeu lors de la déformation d'un alliage de titane, les différentes modélisations du comportement macroscopique vont être explicitées. Certaines peuvent être simples avec de nombreuses hypothèses admises et d'autres beaucoup plus complexes. Le nombre de paramètres à identifier pour permettre l'utilisation de la loi de comportement choisie doit être raisonnable afin d'utiliser un nombre limité de tests expérimentaux simples.

Il est important de choisir un comportement élasto-plastique permettant de prendre en compte la dépendance du comportement mécanique à la direction de sollicitation. Plusieurs lois de comportement doivent être définies :

- un comportement élastique isotrope défini par la loi de Hooke,
- Une loi d'écrouissage cinématique pour définir le déviateur du tenseur cinématique  $[\mathbf{X}]$ ,
- une surface convexe pour définir la surface de plasticité initiale en fonction du déviateur des contraintes  $[\mathbf{S}]$  :  $f([\mathbf{S}] - [\mathbf{X}])$ ,
- une loi d'écrouissage isotrope continue et dérivable pour définir la contrainte d'écoulement  $\sigma_y$ ,

Celles-ci permettent de définir la loi de comportement d'un matériau élasto-plastique par l'intermédiaire de la fonction  $F_p$  :

$$F_p = f([\mathbf{S}] - [\mathbf{X}]) - \sigma_y \quad (\text{I.1})$$

Suivant la valeur de  $F_p$ , le comportement est élastique ( $F_p < 0$ ) ou élasto-plastique ( $F_p = 0$ ).

Concernant les propriétés élastiques, on considérera que le matériau pourra être simplement modélisé par un comportement isotrope, régit par la loi de Hooke :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} S_{ij} \quad (\text{I.2})$$

avec  $E$  et  $\nu$  le module de Young et le coefficient de poisson,  $[\mathbf{S}]$  et  $[\boldsymbol{\epsilon}]$  les déviateurs des tenseurs des contraintes et des déformations. A partir de l'équation [I.2](#), on exprime le comportement élastique de façon matricielle grâce à la matrice  $[\mathbf{C}]$  :

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\mathbf{C}]\{\mathbf{S}\} \quad (\text{I.3})$$

Plusieurs modélisations du comportement plastique peuvent être envisagées. La table [I.5](#) résume les différentes possibilités en fonction du degré de précision voulue.

Plus la loi de comportement est précise, plus l'identification de tous les paramètres et son implémentation dans un logiciel de calcul deviennent complexes.

Critère de plasticité	Loi d'écrouissage	Variable d'écrouissage
Isotrope	Isotrope	$p$
Isotrope	cinématique	$\mathbf{X}$
Anisotrope	Isotrope	$p$
Anisotrope	Cinématique	$\mathbf{X}$
Isotrope	Isotrope + Cinématique + Anisotrope	$p, \mathbf{X}, \epsilon_p$
Anisotrope	Isotrope + Cinématique + Anisotrope	$p, \mathbf{X}, \epsilon_p$

TABLE I.5 – Les différentes lois de comportement régissant la plasticité [Lemaitre98]

On va donc dans un premier temps détailler les critères de plasticité, à la fois isotropes et anisotropes permettant la modélisation de la surface de plasticité des alliages de titane.

### I.3.1 La modélisation de la surface de plasticité

On distingue les critères de plasticité isotropes et anisotropes. L'anisotropie d'un matériau signifie que le comportement mécanique est différent selon la direction de sollicitation. On prend généralement comme direction de référence la direction de laminage. Dans la suite de ce rapport, la direction 0 sera donc la direction de laminage. Les figures ci-dessous expriment cette dépendance à la direction de sollicitation pour le module de Young (Fig. I.21) et le comportement plastique (Fig. I.22). Les critères anisotropes se divisent en deux parties. On nommera critère anisotrope quadratique, tous les critères qui définissent la surface de charge par des fonctions quadratiques. Ces critères sont surtout utilisés pour la modélisation du comportement anisotrope des aciers. Les autres sont dits critères non quadratiques. Ils ont été développés dans l'optique d'une modélisation de l'anisotropie des alliages d'aluminium et autres matériaux.

#### I.3.1.a Les critères isotropes

**i) Critère de Tresca.** Les critères de plasticité isotropes sont les plus courants. Les plus utilisés sont le critère de Von Mises et le critère de Tresca. Le critère de Tresca est un critère en contrainte de cisaillement maximale, et s'exprime de la façon suivante dans le repère des contraintes principales :

$$f(S) = \text{Max}(i, j = I, II, III) |S_i - S_j| \quad (\text{I.4})$$

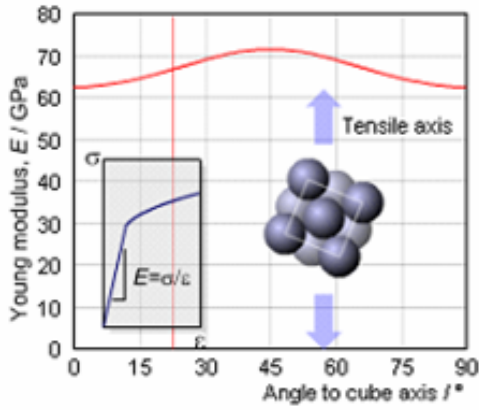


FIGURE I.21 – Évolution du module de Young en fonction de la direction de sollicitation [int]

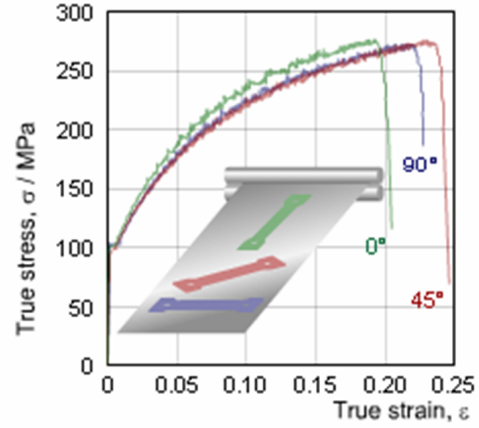


FIGURE I.22 – Représentation de la plasticité en fonction de la direction de sollicitation [int]

**ii) Critère de Von Mises.** Le second critère de plasticité couramment utilisé pour la modélisation d'un comportement plastique isotrope est le critère de Von Mises, dont l'expression dans le repère des contraintes principales est :

$$f(S) = \left( (S_I - S_{II})^2 + (S_{II} - S_{III})^2 + (S_I - S_{III})^2 \right)^{1/2} \quad (\text{I.5})$$

Ces deux critères sont indépendants de la pression hydrostatique, ils peuvent donc être exprimés soit avec le déviateur  $[S]$  soit avec le tenseur des contraintes  $[\sigma]$ . Leur représentation en contraintes planes dans le repère des contraintes principales ( $S_I$  et  $S_{II}$ ) permet de comprendre les différences entre ces deux critères (Fig. I.23). Le critère de Von Mises décrit une surface de plasticité elliptique, tandis que le critère de Tresca décrit une géométrie hexaédrique.

Ils existent de nombreux autres critères de plasticité isotropes, mais sont en général très peu utilisés pour la modélisation de la plasticité. Par contre, ils permettent la construction de critères de plasticité anisotropes non quadratiques (section I.3.1.c).

**iii) Critère de Hosford.** Le critère de plasticité isotrope de Hosford [Hosford72] est une généralisation du critère de Von Mises (équation I.5) et du critère de Tresca (équation I.4). Il s'agit d'un critère indépendant de la pression hydrostatique, s'exprimant en fonction du paramètre  $a$ , entier définissant la forme de la surface de plasticité :

$$f(S) = (|S_I - S_{II}|^a + |S_{II} - S_{III}|^a + |S_I - S_{III}|^a)^{1/a} \quad (\text{I.6})$$

L'ajout d'un paramètre  $a$  permet une évolution de la surface de plasticité en fonction du matériau modélisé. Une surface de plasticité de Von Mises pour les valeurs  $a = 2$  ou



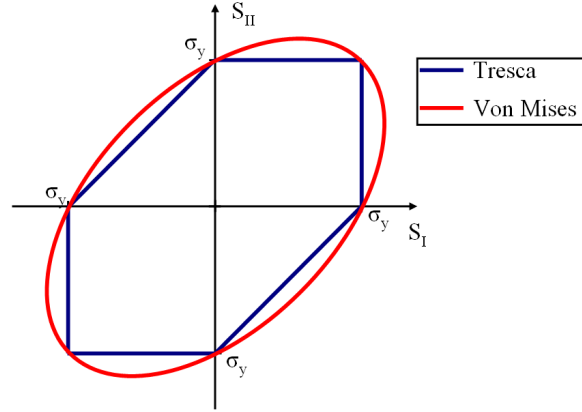


FIGURE I.23 – Représentation graphique des critères de plasticité de Tresca et de Von Mises dans le repère des contraintes principales ( $S_I$  et  $S_{II}$ )

$a=4$  et une surface de Tresca pour  $a=1$  ou  $a \rightarrow \infty$  peuvent être retrouvées par ce modèle. Ce critère rend possible la description de comportement plastique intermédiaire entre le critère de Von Mises et le critère de Tresca en fonction du paramètre  $a$ . Les matériaux à structure cristallographique cubique faces centrées sont caractérisés par ce critère pour une valeur du paramètre  $a=6$ .

**iv) Critère de Karafillis et Boyce.** Karafillis *et al.* [Karafillis93] propose un critère isotrope, basé sur des transformations mathématiques à partir d'autres critères isotropes. L'expression du critère est donc la suivante :

$$f(S) = (1-c) \{|S_I - S_{II}|^a + |S_{II} - S_{III}|^a + |S_I - S_{III}|^a\} + c \frac{3^a}{2^{a-1} + 1} \{|S_I|^a + |S_{II}|^a + |S_{III}|^a\} \quad (\text{I.7})$$

Le paramètre  $a$  joue le même rôle que dans le critère de Hosford. Le paramètre  $c$ , réel compris entre 0 et 1, permet de faire évoluer la surface de plasticité entre deux fonctions mathématiques.

### I.3.1.b Les critères anisotropes quadratiques

Les critères de plasticité anisotropes quadratiques permettent la modélisation d'un comportement anisotrope peu marqué. Ils supposent la symétrie du comportement mécanique en traction et en compression. Ils ne modélisent pas les concentrations de déformations plastiques qui peuvent caractériser certains matériaux dont les alliages de titane. De plus, ils sont indépendants de la pression hydrostatique. Le plus utilisé d'entre eux est le critère de Hill 1948 [Hill48]. Aujourd'hui encore, sa facilité d'utilisation et

une identification des paramètres basée uniquement à partir des tests de traction lui permettent d'être le critère le plus utilisé dans un contexte industriel.

**i) Critère de Hill 1948.** Le critère de Hill est une généralisation du critère de Von Mises par l'ajout de coefficients pondérateurs devant les termes composant le critère de Von Mises (équation I.5). Cette modification permet la prise en compte d'un comportement différent selon la direction de sollicitation. L'expression indicelle de ce critère est la suivante :

$$f(\mathbf{S}) = (F(S_{22}-S_{33})^2 + G(S_{33}-S_{11})^2 + H(S_{11}-S_{22})^2 + 2LS_{23}^2 + 2MS_{13}^2 + 2NS_{12}^2)^{(0.5)} \quad (\text{I.8})$$

Les 6 paramètres d'anisotropie sont donc les variables F, G, H, L, M, N. L'utilisation de ce critère pour la modélisation de tôles restreint le nombre de paramètres à 4 : F, G, H et N [Hill93]. En considérant que le comportement de référence est obtenu dans la direction de laminage, on obtient donc  $G+H = 1$ . L'écriture matricielle permet de faire apparaître le déviateur des contraintes  $\{\mathbf{S}\}$  :

$$f(\mathbf{S})^2 = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

L'apport de la prise en compte du comportement anisotrope par l'intermédiaire de la matrice de Hill  $[\mathbf{H}]$  est visualisé sur la figure I.24. Le tracé d'une surface de plasticité isotrope et anisotrope montre des limites élastiques différentes selon l'orientation de la sollicitation, en comparant les grandeurs obtenues dans la direction de laminage  $\sigma_0$  et dans la direction transverse  $\sigma_{90}$ .

D'autres critères quadratiques ont été développés à partir de celui-ci. Ils permettent de raffiner la description du comportement plastique en permettant la modélisation de zones de localisation des déformations plastiques et une prise en compte des propriétés cristallographiques. Cependant le nombre d'essais expérimentaux nécessaires pour l'identification de la surface de plasticité doit rester raisonnable.

**ii) Critère de Hu.** W. Hu [Hu07a] a développé un critère de plasticité, basé sur le critère de Hill. La surface de plasticité est décomposée en cinq parties, chacune définie par une fonction quadratique, comme celle utilisée par Hill (équation I.8). Suivant la

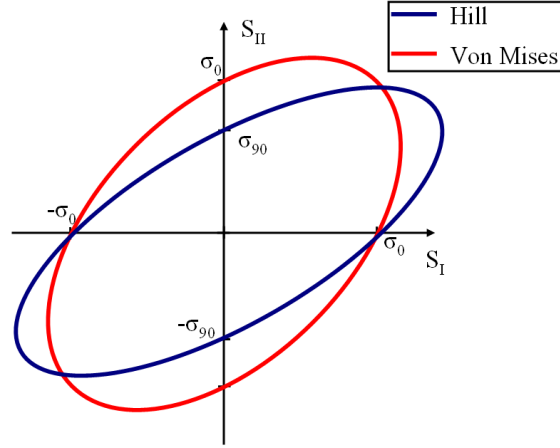


FIGURE I.24 – Représentation graphique des critères de plasticité de Hill 1948 et de Von Mises dans le repère des contraintes principales ( $S_I$  et  $S_{II}$ )

direction de la contrainte principale, on utilise des jeux de paramètres différents pour le critère de Hill. La spécificité de ce critère est donc de faire varier le comportement anisotrope en fonction de la direction de sollicitation. Les concentrations de déformations peuvent donc être modélisées comme le montre la figure I.25.

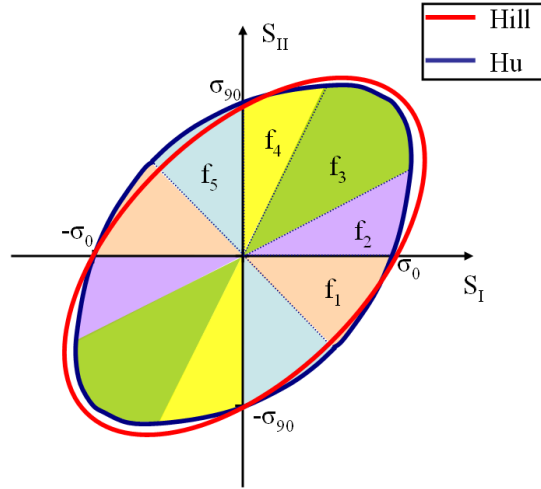


FIGURE I.25 – Représentation graphique des critères de plasticité de Hill 1948 et de Hu dans le repère des contraintes principales ( $S_I$  et  $S_{II}$ ) [Hu07b]

En admettant l'hypothèse des contraintes planes, la surface de plasticité peut être définie par cinq fonctions différentes  $f_i$  sur le domaine  $\Gamma$ , découpés en sous-domaines  $\Gamma_i$  :

$$\forall [\mathbf{S}] \in \Gamma_i, i = 1..5, f_i = a_1(S_I - S_{III})^2 + b_i(S_{II} - S_{III})^2 + c_i(S_I - S_{III})(S_{II} - S_{III}) \quad (\text{I.10})$$

Les sous-domaines  $\Gamma_i$  sont définis en fonction des contraintes principales du déviateur :

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \quad si \quad -1 \leq \frac{S_{II} - S_{III}}{S_I - S_{III}} \leq 0 \\ \Gamma_2 \quad si \quad 0 \leq \frac{S_{II} - S_{III}}{S_I - S_{III}} \leq 0,5 \\ \Gamma_3 \quad si \quad 0,5 \leq \frac{S_{II} - S_{III}}{S_I - S_{III}} \leq 2 \\ \Gamma_4 \quad si \quad 0 \leq \frac{S_{II} - S_{III}}{S_I - S_{III}} \leq 0,5 \\ \Gamma_5 \quad si \quad -1 \leq \frac{S_{II} - S_{III}}{S_I - S_{III}} \leq 0 \end{array} \right\} \quad (I.11)$$

La caractérisation de cette surface de plasticité nécessite l'identification de 15 paramètres. Ces derniers sont déterminés par cinq résultats expérimentaux, à savoir les limites d'élasticité et les coefficients de Lankford associés à deux tests de traction uniaxiale et un test de traction biaxiale pour permettre l'exploration de la zone de localisation de contrainte. La combinaison des résultats expérimentaux et des contraintes géométriques, à savoir la continuité de la surface de plasticité et de sa dérivée, permet l'identification des paramètres du modèle. Les relations géométriques peuvent s'écrire à la frontière de chaque sous-domaine :

$$\forall i, j \in [1, 5], \forall [\mathbf{S}] \in \Gamma_i \cap \Gamma_j \quad f_i = f_j \quad (I.12)$$

$$\forall i, j \in [1, 5], \forall [\mathbf{S}] \in \Gamma_i \cap \Gamma_j, \quad \frac{\partial f_i}{\partial S_I} = \frac{\partial f_j}{\partial S_I} \text{ et } \frac{\partial f_i}{\partial S_{II}} = \frac{\partial f_j}{\partial S_{II}} \quad (I.13)$$

L'identification des paramètres est simple à mettre en oeuvre et ce critère allie à la fois précision et simplicité. De nombreux autres critères de plasticité existent et affinent la description de la surface en exprimant cette dernière par une fonction non quadratique.

### I.3.1.c Les critères anisotropes non quadratiques

De nombreux critères non quadratiques ont été développés. Dans la suite de cette partie, une liste non exhaustive de critères de plasticité sera détaillée. La réflexion permettant la transformation d'un critère isotrope en un critère anisotrope sera explicitée. En effet, on peut établir de nombreux critères de plasticité anisotrope, tout en augmentant le nombre de paramètres à identifier. Le choix d'un critère de plasticité réside dans le rapport entre la précision du critère et le nombre de paramètres à identifier, qui peut atteindre 40 pour les critères les plus complexes.

**i) Critère de Hill non quadratique.** Hill [Hill90] a développé un critère non quadratique à partir de son critère quadratique, considérant comme symétrique le comportement en traction et en compression. L'expression de celui-ci en contraintes planes est la suivante :

$$f(S) = |S_{11} + S_{22}|^m + \left(\frac{\sigma_t^m}{\tau_c^m}\right) |(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2|^m + |S_{11}^2 + 2S_{22}^2 + S_{12}^2|^{m/2-1} \{-2a(S_I^2 - S_{II}^2) + b(S_I - S_{II})^2\} \quad (\text{I.14})$$

Avec  $a$ ,  $b$  et  $m$  des paramètres adimensionnés qui doivent être identifiés à partir d'essais expérimentaux.  $\sigma_t$  et  $\tau_c$  sont les contraintes limites d'élasticité en traction et en cisaillement. La convexité de la fonction n'est pas assurée pour tous les jeux de paramètres.

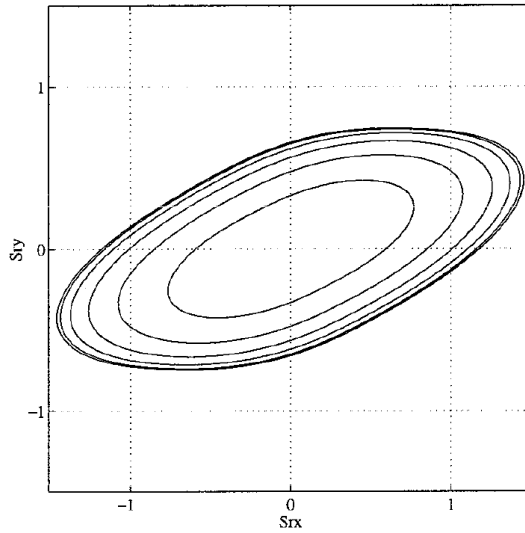


FIGURE I.26 – Surface de plasticité issue du critère de Hill [Meuwissen]

**ii) Critère non quadratique de la famille de Hosford.** Les critères de plasticité anisotropes non quadratiques, dits de la famille de Hosford, dérivent du critère isotrope de Hosford (équation I.6). Ils permettent de lier le comportement plastique à la microstructure du cristal. Le nombre de critères développés dans cette famille est très important. A partir d'une fonction isotrope tel que le critère de Hosford (équation I.6) ou de Karafillis Boyce (équation I.7), une transformation linéaire  $[L]$  sur les contraintes permet de modéliser le comportement anisotrope [Barlat07]. Avant l'application du critère, on applique donc le changement de base suivant aux déviateurs des contraintes :

$$f(\mathbf{S}) = \phi(\tilde{\mathbf{S}}), \{\tilde{\mathbf{S}}\} = [L]\{\mathbf{S}\} \quad (\text{I.15})$$

avec la fonction  $\phi$ , une fonction isotrope. On peut, afin d'améliorer la description théorique de la surface de plasticité, multiplier le nombre de transformations linéaires appliquées au déviateur avant l'utilisation d'un critère isotrope. Mais, le nombre de paramètres nécessaires à la modélisation de la surface de plasticité croît avec le nombre de transformations. On compte entre 6 et 9 coefficients pour chaque changement de base suivant que l'on considère une matrice de changement de base symétrique ou non. Des propriétés de non symétrie entre le comportement en traction et en compression peuvent être intégrées au critère de plasticité. Barlat *et al.* [Barlat89] [Barlat91] sont les premiers à avoir étendu le critère de Hosford pour permettre la modélisation de l'anisotropie. Karafillis and Boyce [Karafillis93] ont modifié leur critère isotrope (équation I.7) pour le rendre anisotrope en ajoutant une transformation linéaire sur le déviateur des contraintes. Barlat *et al.* [Barlat97] [Cazacu03] ont développé leurs critères pour les alliages d'aluminium en utilisant les transformations linéaires. Cependant, l'implémentation dans un code de calcul et l'obtention de la convexité de la surface restent difficiles pour certains critères (critère de Barlat 1996). Pour remédier à ces insuffisances, Yoon et Barlat ajoutèrent une seconde transformation linéaire, et généralisèrent le concept de la transformation linéaire du tenseur des contraintes [Barlat05]. Avec ces critères, Yoon et son équipe [Yoon06] simulèrent l'emboutissage d'un godet cylindrique avec six ou huit cornes d'emboutissage. Banabic *et al.* [Banabic03b] ont généralisé le critère de Barlat et Lian, avec un critère à six paramètres pour la condition de contraintes planes. On peut remarquer que la plupart de ces critères a été appliquée pour des matériaux dont la structure cristallographique est cubique. Cazacu *et al.* [Cazacu06] ont étendu cette famille pour les structures hexagonales compactes. Les critères les plus connus ont donc été cités dans ce bref historique des critères de la famille d'Hosford. De nombreux autres ont été développés selon les mêmes approches, en multipliant les transformations linéaires, et donc le nombre de paramètres à identifier. Dans la suite, on va expliciter quelques-uns de ces critères. Des similitudes peuvent être établies entre les différentes expressions des critères de plasticité de la famille de Hosford [Mattiasson08].

**iii) Critère de Barlat 91.** Il s'agit du premier critère anisotrope développé par Barlat *et al.* basé sur le critère de Hosford (équation I.6). L'anisotropie est caractérisée par 6 paramètres  $c, d, e, f, g, h$  et considère un comportement symétrique en traction et en compression :

$$f(S) = \left( |\tilde{S}_I - \tilde{S}_{II}|^a + |\tilde{S}_{II} - \tilde{S}_{III}|^a + |\tilde{S}_I - \tilde{S}_{III}|^a \right)^{1/a} \quad (\text{I.16})$$

Le tenseur  $[\tilde{\mathbf{S}}]$  est obtenu avec les transformations suivantes sur le déviateur des contraintes  $[\mathbf{S}]$  :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{11} &= \frac{e(S_{11} - S_{22}) - d(S_{33} - S_{11})}{3} \\ \tilde{S}_{22} &= \frac{c(S_{22} - S_{33}) - e(S_{11} - S_{22})}{3} \\ \tilde{S}_{33} &= \frac{d(S_{33} - S_{11}) - c(S_{22} - S_{33})}{3}\end{aligned}\tag{I.17}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{23} &= fS_{23} \\ \tilde{S}_{13} &= gS_{13} \\ \tilde{S}_{12} &= hS_{12}\end{aligned}\tag{I.18}$$

La convexité de la surface de plasticité est assurée par la condition  $a > 1$ . Ce même paramètre peut être utilisé pour influencer la courbure de la surface de plasticité en fonction de la structure cristalline, et notamment pour caractériser les réseaux cubiques. Pour  $c=d=e=f=g=h=1$ , on retrouve le critère de Von Mises ou de Tresca suivant la valeur du paramètre  $a$ .

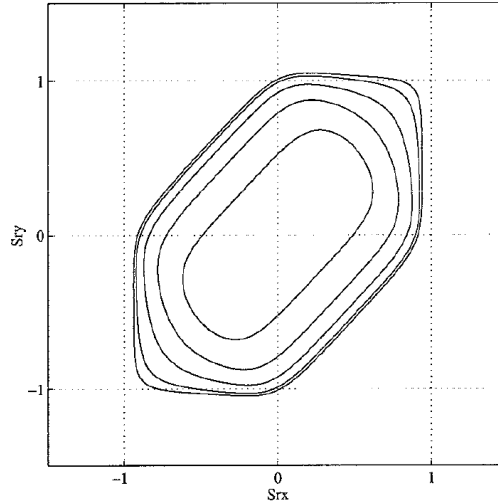


FIGURE I.27 – Surface de plasticité issue du critère de Barlat 91 [Meuwissen]

**iv) Critère Yld2004-18p.** Barlat et Yoon [Barlat07] ont développé ce critère de plasticité, indépendant de la pression hydrostatique et permettant la modélisation du comportement plastique des matériaux possédant un réseau cristallin cubique. Pour cela, deux tenseurs  $[\mathbf{S}']$  et  $[\mathbf{S}'']$  doivent être définis par des transformations linéaires sur

le déviateur des contraintes  $[\mathbf{S}]$ . La forme de ce critère est la suivante :

$$f(\mathbf{S}) = \phi(\mathbf{S}', \mathbf{S}'') = \left( \frac{1}{4} \sum_{i,j}^{I,III} |\mathbf{S}'_i - \mathbf{S}''_j|^a \right)^{1/a} \quad (\text{I.19})$$

Ce critère se base donc sur les valeurs principales  $S'_i$  et  $S''_i$  des tenseurs  $[\mathbf{S}']$  et  $[\mathbf{S}'']$ . Ces tenseurs sont obtenus par une transformation linéaire  $[\mathbf{L}]$  ayant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} S'_{11} \\ S'_{22} \\ S'_{33} \\ S'_{12} \\ S'_{23} \\ S'_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} O & L'_{12} & L'_{13} & & & \\ L'_{21} & 0 & L'_{23} & & & \\ L'_{31} & L'_{32} & 0 & & & \\ & & & L'_{44} & & \\ & & & & L'_{55} & \\ & & & & & L'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{I.20})$$

L'anisotropie est donc définie par les 18 paramètres (9 par transformation linéaire) permettant les changements de base définissant les deux tenseurs  $[\mathbf{S}']$  et  $[\mathbf{S}'']$ . Ce critère a été utilisé pour la modélisation de la surface de plasticité d'un alliage d'aluminium et son implémentation dans un logiciel éléments finis a permis la simulation d'un emboutissage d'un godet cylindrique [Yoon06].

**v) Le critère BBC2000.** On retrouve le critère BBC2000 développé par Banabic *et al.* [Banabic03b] pour la modélisation des tôles d'aluminium. Il s'agit d'une expression tenant compte de l'hypothèse des contraintes planes :

$$f(S) = \left[ \frac{1}{2} (b|\Gamma + \Psi|^a + a|\Gamma - \Psi|^a + (2-b)|\Lambda|^a) \right]^{1/a} \quad (\text{I.21})$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\gamma_1 \sigma_{xx} + \gamma_2 \sigma_{yy}) \quad (\text{I.22})$$

$$\Psi = \sqrt{\left( \frac{\psi_1 \sigma_{xx} - \psi_2 \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \psi_3^2 \sigma_{xy}^2} \quad (\text{I.23})$$

$$\Lambda = \sqrt{\left( \frac{\lambda_1 \sigma_{xx} - \lambda_2 \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \lambda_3^2 \sigma_{xy}^2} \quad (\text{I.24})$$

Le paramètre  $a$  appartient à l'intervalle réel  $[0, 2]$ . L'anisotropie est décrite par huit paramètres indépendants  $\gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Certaines hypothèses permettent de réduire le nombre de paramètres indépendants. On distingue trois cas dans la littérature [Paraianu03] :

1.  $\Lambda = \Psi$  : 6 paramètres indépendants  $a, \gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3$
2.  $\lambda_1 = \Psi_1$  : 8 paramètres indépendants  $a, \gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \lambda_2, \lambda_3$
3.  $\gamma_1 = 1$  : 8 paramètres indépendants  $a, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$



4. Aucune hypothèse : 9 paramètres indépendants  $a, \gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Les hypothèses présentées ci-dessus permettent la réduction du nombre de paramètres indépendants, et facilitent l'identification du critère à partir de données expérimentales. La surface de plasticité d'un alliage d'aluminium peut ainsi être décrite (Fig. I.28). On peut réécrire l'équation I.24 de la manière suivante :

$$f(S) = \left[ \frac{1}{2} (|\Gamma' + \Psi'|^a + a|\Gamma' - \Psi'|^a + |\Lambda'|^a) \right]^{1/a} \quad (\text{I.25})$$

**vi) Le critère MS6p.** Mattiason et al. [Mattiasson08] ont développé le critère de plasticité MS6p à six paramètres du matériau, établi à partir des deux critères non quadratique de la famille d'Hosford. En supposant un état de contrainte plane, il peut s'écrire sous la forme :

$$f(S) = \left[ \frac{1}{2} (b|\tilde{S}'_I|^a + b|\tilde{S}'_{II}|^a + (2-b)|\tilde{S}'_I - \tilde{S}'_{II}|^a) \right]^{1/a} \quad (\text{I.26})$$

Avec  $0 \leq a \leq 2$  et le tenseur  $\tilde{S}$  définit par la transformation linéaire  $[\mathbf{L}]$  :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{S}'_{11} \\ \tilde{S}'_{22} \\ \tilde{S}'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.27})$$

L'introduction de ce critère est purement motivé par des soucis d'implémentation dans un code éléments finis, avec un gain important de l'efficacité du code de calcul pour une moindre précision du critère de plasticité, comme le montre la figure I.28 pour un alliage d'aluminium, notamment pour le comportement dans la direction transverse. Cependant la description de la surface de plasticité reste précise à la vue de la comparaison avec les points expérimentaux.

Les critères présentés ci-dessus sont les plus généraux, pour les matériaux à structure cristalline cubique. Ils sont utilisés dans l'industrie automobile et valables pour des contraintes planes. Cette hypothèse convient bien à la mise en forme de tôle par emboutissage. On peut cependant extrapoler ces critères pour des cas de chargement 3D complets.

**vii) Le critère de Cazacu 2006.** Le critère de plasticité de Cazacu [Cazacu06] a été développé pour modéliser le comportement des matériaux à structure hexagonale compacte, en tenant compte des phénomènes de glissement et de maclage présents lors

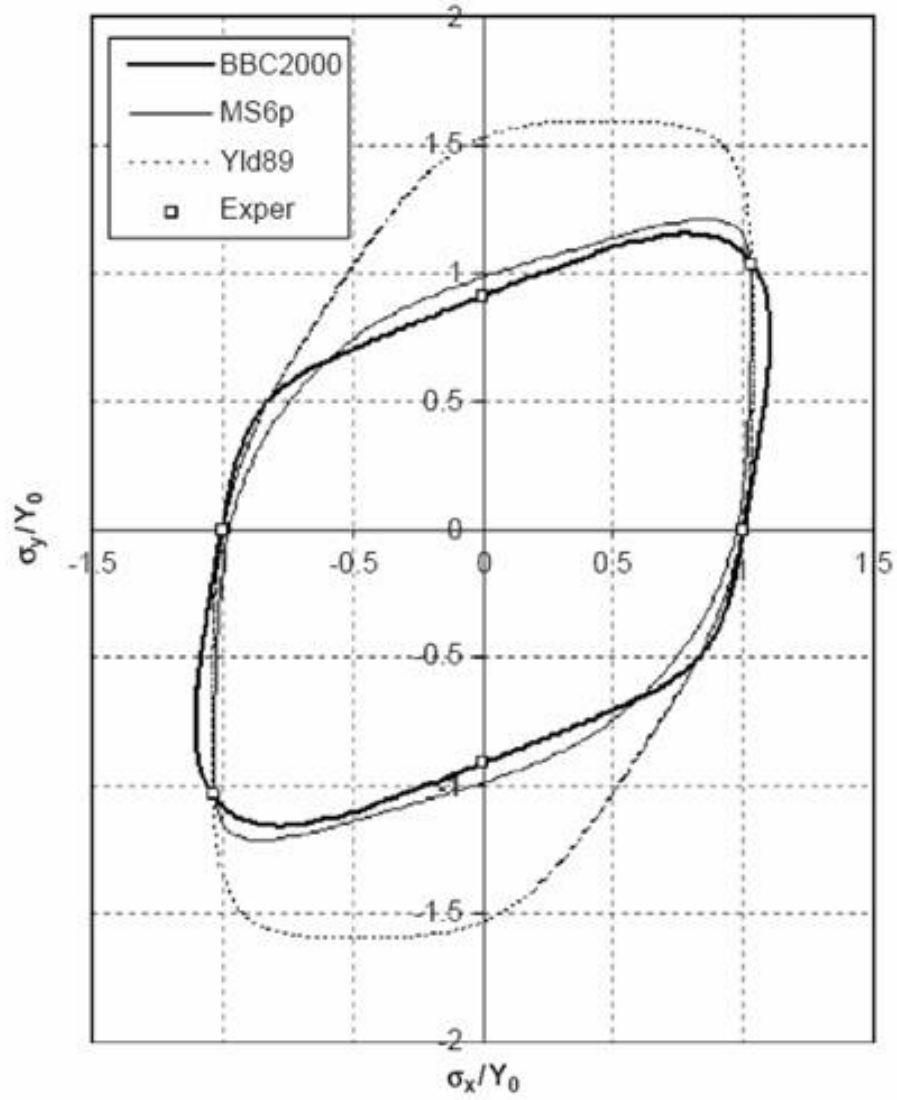


FIGURE I.28 – Comparaison des différents critères pour le matériau AA2090-T3 [Mattiasson08]

de la déformation plastique des alliages de titane. Ce critère se base sur une fonction isotrope :

$$f(\tilde{\mathbf{S}}) = \left( (|\tilde{S}_I| - k\tilde{S}_I)^a + (|\tilde{S}_{II}| - k\tilde{S}_{II})^a + (|\tilde{S}_{III}| - k\tilde{S}_{III})^a \right)^{1/a} \quad (\text{I.28})$$

La particularité de ce critère isotrope est la prise en compte de la non symétrie entre le comportement plastique en traction et en compression, par l'intermédiaire des deux paramètres  $k$  et  $a$ . Ces derniers sont dépendants, et généralement, on fixe  $a = 2$  pour déterminer le paramètre  $k$  grâce à deux essais : un test de traction et un de compression. La propriété de convexité de la surface de plasticité impose la condition suivante :  $-1 \leq$

$k \leq 1$ . Ce paramètre  $k$  peut être déterminé par les relations suivantes :

$$k = \frac{1 - h(\frac{\sigma_T}{\sigma_C})}{1 + h(\frac{\sigma_T}{\sigma_C})} \quad (\text{I.29})$$

$$h(\frac{\sigma_T}{\sigma_C}) = \left[ \frac{2^a - 2(\frac{\sigma_T}{\sigma_C})^a}{(2\frac{\sigma_T}{\sigma_C})^a - 2} \right] \quad (\text{I.30})$$

On remarque que si  $k = 0$ , on modélise un comportement similaire entre la traction et la compression. Cette fonction considère donc la non symétrie du comportement imposée par la microstructure hexagonale compacte. L'anisotropie est introduite par une transformation linéaire  $[\mathbf{L}]$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{33} \\ \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{23} \\ \tilde{S}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & & & \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & & & \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & & & \\ & & & L_{44} & & \\ & & & & L_{55} & \\ & & & & & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

Il faut noter que si  $[\mathbf{S}]$  est un déviateur,  $[\tilde{\mathbf{S}}]$  peut être un tenseur suivant les paramètres fixant le caractère anisotrope  $L_{ij}$ .

En vue de l'implémentation de ce critère dans un code de calcul par éléments finis, une constante  $B$  permet d'adimensionnaliser la valeur du critère de plasticité par rapport à l'écoulement dans la direction de laminage. La valeur de  $B$  dépend donc des coefficients de la matrice  $[\mathbf{L}]$ , et est différente selon que l'on considère que ce critère utilise le tenseur des contraintes ou le déviateur du tenseur des contraintes. Dans le premier cas, cette constante s'exprime selon l'équation suivante :

$$B = (1 - k) \quad (\text{I.32})$$

Dans le cas où l'on utilise le déviateur du tenseur des contraintes, la constante  $B$  devient plus complexe et son expression est la suivante :

$$B^a = \sum_{i=1}^3 (|W_i| - kW_i)^a, \quad W_i = \frac{2}{3}L_{i1} - \frac{1}{3}L_{i2} - \frac{1}{3}L_{i3} \quad (\text{I.33})$$

L'écriture finale du critère de plasticité est donc la suivante :

$$f(\mathbf{S}) = \frac{1}{B} \left( \sum_{i=I..III} (|\tilde{S}_i| - k\tilde{S}_i)^a \right)^{1/a} \quad (\text{I.34})$$

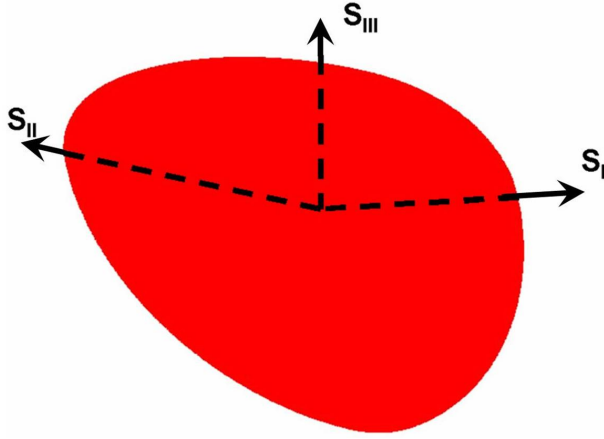


FIGURE I.29 – Surface de plasticité pour l’alliage de titane 4A1 – 1/4O<sub>2</sub> (1%), tracée dans le repère des contraintes principales.

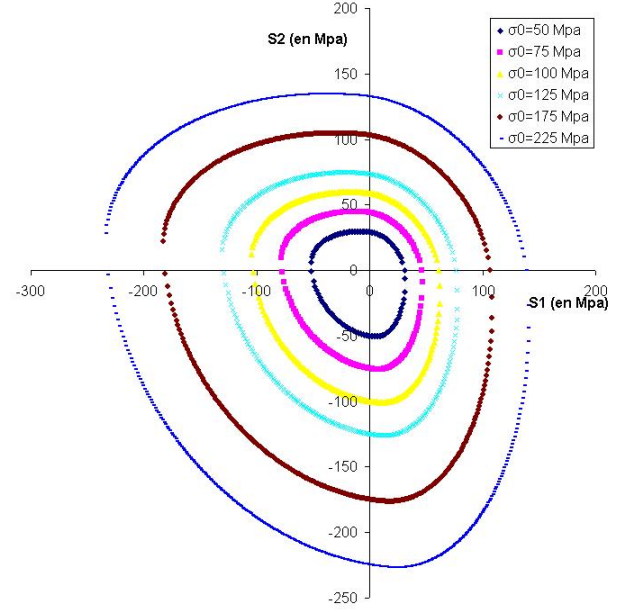


FIGURE I.30 – Évolution de la surface de plasticité pour différentes valeurs de contraintes d’écoulement dans le plan des contraintes principales ( $S_1$  et  $S_2$ ).

La surface de plasticité a été identifiée pour un alliage de titane commercialement pur [Cazacu06], et tracé en 3D (Fig. I.29), ainsi que son évolution avec la contrainte d’écoulement dans les directions des contraintes principales (Fig. I.30).

Les critères de plasticité, présentés ci-dessus, peuvent tous être implémentés dans un logiciel éléments finis. Le critère de plasticité quadratique de Hill 1948 et le critère de plasticité non quadratique de Cazacu sont retenus pour la suite de cette étude. Le premier est un critère couramment utilisé et le second est développé spécialement pour les métaux hexagonaux compacts comme les alliages de titane. Après avoir défini la forme de la surface de plasticité, il faut définir l’évolution de celle-ci au cours de la déformation plastique.

### I.3.2 Loi d’écrouissage cinématique

L’écrouissage cinématique permet la modélisation de l’effet Bauschinger [Chun02a], qui détermine le comportement plastique du matériau lors de sollicitations cycliques. Ce phénomène est modélisé par l’intermédiaire d’un tenseur d’écrouissage cinématique  $[X]$ , exprimant ainsi le déplacement de la surface de plasticité au cours de la transformation

plastique (Fig. I.31). Lors d'un cycle charge/décharge, un écart entre la contrainte à la fin de la charge  $\sigma_1$  et la contrainte  $\sigma_2$  à laquelle la déformation plastique croît de nouveau (Fig. I.32).

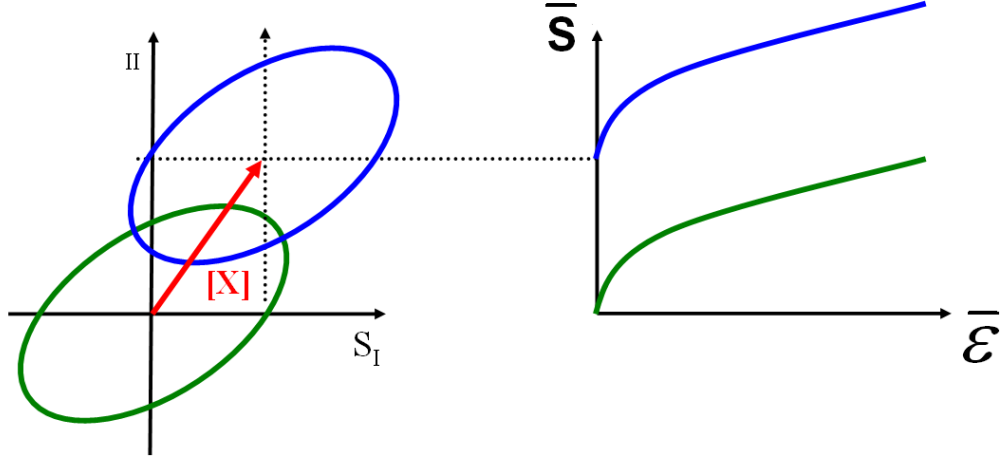


FIGURE I.31 – Effet du tenseur d'écrouissage cinématique  $[X]$  sur la surface de plasticité

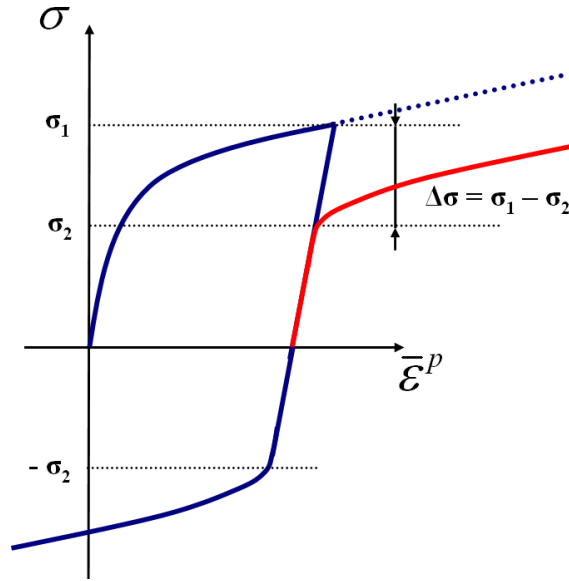


FIGURE I.32 – Schématisation de l'effet Bauschinger lors de la charge-décharge d'un matériau

La forme générale régissant une loi d'écrouissage cinématique est fonction du tenseur cinématique  $[X]$ , tenseur représentatif de la translation de la surface de charge et modifiant le critère de plasticité selon l'expression suivante :

$$f = f(S - X) \quad (I.35)$$

L'écrouissage cinématique permet donc de modéliser le comportement en chargement cyclique d'un matériau, et affine la prédiction numérique lors de sollicitations avec un nombre de cycles important afin de déterminer une durée de vie, notamment pour les aciers utilisés à chaud [Zhang02] [Velay06]. Cependant, dans le cadre de notre étude, l'écrouissage cinématique contribuera à la détermination des contraintes résiduelles et du retour élastique. De plus, les résultats de simulations de procédés de formage à plusieurs passes pourront ainsi être plus précis. Une prédiction correcte du retour élastique et des contraintes résiduelles est importante pour optimiser le processus de mise en forme. La modélisation de l'écrouissage cinématique se reposera sur les modèles permettant un calcul numérique fiable de ces grandeurs.

Suivant la forme du tenseur  $[\mathbf{X}]$ , on distingue les lois linéaires et non linéaires. Les premières lois d'écrouissage cinématique linéaires ont été introduites au XIX<sup>ème</sup> siècle par Drucker :

$$[\dot{\mathbf{X}}] = C_0[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]^p \quad (\text{I.36})$$

où  $C_0$  est un paramètre du matériau déterminé par identification grâce à des essais de traction-compression. Un modèle d'écrouissage linéaire n'est valable que pour des petites déformations. Dans le cadre des grandes transformations, on ne peut se limiter à un modèle validé sur une plage de déformation réduite, d'autres lois de comportement doivent donc être introduites. La combinaison entre un modèle linéaire et un modèle non linéaire permet une bonne modélisation pour une large plage de déformation plastique. Le plus utilisé d'entre eux est le modèle d'Armstrong-Frederick [Chun02a] qui associe une fonction linéaire et une fonction non linéaire :

$$[\dot{\mathbf{X}}] = D[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p] - \xi[\mathbf{X}]\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p \quad (\text{I.37})$$

avec  $\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\}$  le déviateur des taux de déformation plastique et  $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p$  le taux de déformation plastique équivalent. Cette loi associe un écrouissage cinématique linéaire, contrôlé par le paramètre matériau  $D$  et un terme modélisant la recristallisation dynamique contrôlée par le paramètre  $\xi$ . Cette approche a été complétée et développée [Chaboche08], en intégrant la prise en compte de l'adoucissement lors de sollicitations cycliques par l'intermédiaire d'une fonction  $\phi$ , fonction de l'écrouissage isotrope  $\sigma_y$  et un paramètre  $w$  (équation I.38). La restauration statique pour la mise en forme à haute température par l'ajout d'un terme fonction de la température  $\tau(T)$  (équation I.39) peut aussi affiner la description de l'écrouissage cinématique.

$$[\dot{\mathbf{X}}] = D[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p] - \xi\phi(\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p)[\mathbf{X}]\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p, \quad \phi(\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p) = \frac{1}{1 + \omega\sigma_y(\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p)} \quad (\text{I.38})$$

$$[\dot{\mathbf{X}}] = D[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p] - \xi[\mathbf{X}]\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p - \frac{\xi}{\tau(T)} \left( \frac{\xi\|\mathbf{X}\|}{D} \right)^{m-1} [\mathbf{X}] \quad (\text{I.39})$$

On peut sommer plusieurs écrouissages pour obtenir une modélisation plus fine des phénomènes mis en jeu lors de sollicitations cycliques. Toutes les lois d'écrouissage cinématique sont sommables :

$$[\mathbf{X}] = \sum_i^n [\mathbf{X}_i] \quad (\text{I.40})$$

On trouve dans la littérature de nombreuses autres lois permettant la prise en compte du phénomène de Bauschinger, notamment en remplaçant la déformation plastique équivalente dans les équations précédentes (équations I.37, I.39, I.38) par une fonction visqueuse [Chaboche08]. Ces modèles s'attachent à décrire précisément le comportement plastique des aciers en intégrant des phénomènes microstructuraux, tels que la restauration et la recristallisation. Transposer ces lois pour les alliages de titane pourrait poser des problèmes quant à la validité de celles-ci. Une étude expérimentale poussée en sollicitations cycliques et des observations microscopiques devraient être réalisées afin de conclure sur leurs efficacités pour la prédiction du comportement plastique des alliages de titane commercialement pur. Chun *et al.* ont montré que l'utilisation d'une loi de type Armstrong-Frederick était suffisante pour la simulation de la mise de l'emboutissage en deux passes d'un godet cylindrique en alliage d'aluminum [Chun02b]. On utilisera par la suite une loi d'écrouissage d'Armstrong-Frederick à deux paramètres, qui permet une prise en compte fiable de l'effet Bauschinger en grandes déformations.

### I.3.3 Loi d'écrouissage isotrope

L'écrouissage isotrope permet la modélisation du durcissement mécanique lors d'une transformation plastique. L'effet de ce phénomène est une dilatation de la surface de plasticité au cours de la déformation plastique.

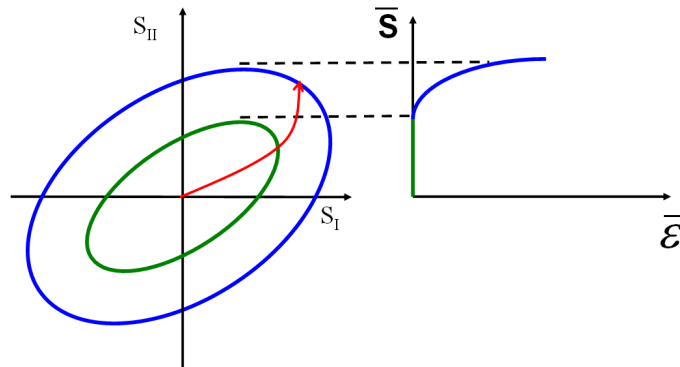


FIGURE I.33 – Effet de l'écrouissage isotrope  $\sigma_y$  sur la surface de plasticité

Plusieurs lois de comportement existent pour la modélisation de l'écrouissage isotrope, notamment des approches très macroscopiques avec des lois phénoménologiques et des approches plus microstructurales, avec l'intégration de variables internes, représentatives de l'évolution microstructurale.

### I.3.3.a Les approches macroscopiques

Ces lois d'écrouissage isotrope permettent la modélisation du durcissement mécanique par des fonctions tenant compte de variables macroscopiques telles que la déformation plastique équivalente  $\bar{\epsilon}^p$  et la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ . On peut citer les lois simples permettant la modélisation du durcissement mécanique uniquement, telles que la loi de Voce (équation I.41) et la loi de Swift (équation I.42) :

$$\sigma_y = K(1 - \exp(-b\bar{\epsilon}^p)) \quad (\text{I.41})$$

$$\sigma_y = K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon}^p)^n \quad (\text{I.42})$$

De nombreuses autres lois permettent la modélisation du durcissement mécanique, cependant, l'écrouissage isotrope est composé à la fois d'une phase de durcissement, puis une phase d'adoucissement. Ces lois permettent uniquement la modélisation de la première d'entre elles. Des lois plus riches [Gavrus96] peuvent prendre en compte toutes ces phases par l'intermédiaire de trois fonctions permettant la modélisation du durcissement mécanique  $K_{ecr}$ , de l'adoucissement  $W$  et de la saturation  $K_{sat}$  :

$$\sigma_y = K_{ecr}(1 - W) + WK_{sat} \quad (\text{I.43})$$

La courbe représentative de cette fonction peut donc être décomposée en trois parties (Fig. I.34), plus ou moins importantes selon le matériau et les paramètres tels que la température ou la vitesse de déformation :

- partie 1 : écrouissage mécanique où la contrainte équivalente augmente fortement
- partie 2 : adoucissement où la contrainte équivalente diminue légèrement
- partie 3 : saturation, où la contrainte équivalente stagne pour atteindre un palier avant la rupture, modélisée par une constante  $K_{sat}$

De nombreuses fonctions existent pour modéliser chaque partie de ces lois, avec des degrés de précision différents. Le nombre de paramètres peut varier de trois à quinze.

**i) Modélisation du durcissement mécanique.** La fonction d'écrouissage modélise le durcissement mécanique de la surface de plasticité. Plusieurs lois permettant la représentation de cette partie du comportement. On peut citer les lois de Voce (équation I.41) , de Swift (équation I.42) et de Norton-Hoff, qui est une loi thermoviscoélastique,



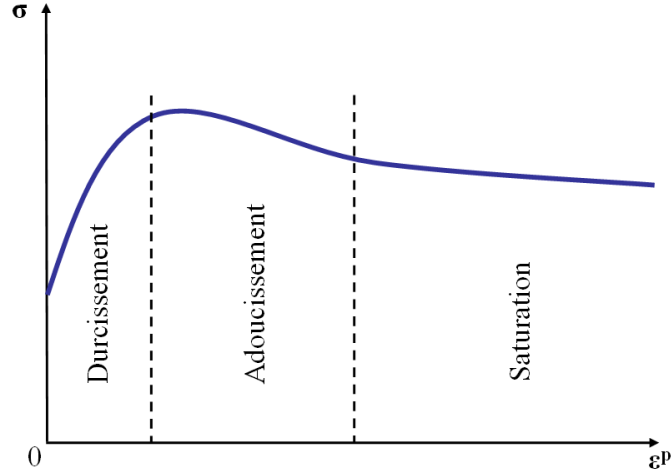


FIGURE I.34 – Modélisation du comportement plastique par une loi adoucissante

donc dépendante de la vitesse de déformation plastique équivalente et à la température  $T$  :

$$K_{ecr} = K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon}^p)^n \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{I.44})$$

Avec  $K$ ,  $\epsilon_0$ ,  $n$  et  $\beta$ , quatre paramètres à identifier. On peut raffiner la description de l'écrouissage en ajoutant des dépendances à la température et à la déformation plastique pour les paramètres  $n$  et  $m$  :

$$n = n_0 + n_1 \bar{\epsilon}^p ; m = m_0 + m_1 \bar{\epsilon}^p \quad (\text{I.45})$$

La loi de Nemat-Nasser [Nemat-Nasser99] permet la modélisation d'un alliage de titane commercialement pur, en tenant compte des mécanismes microstructuraux et de la température :

$$K_{ecr} = D_1 \left[ 1 - \left( -D_2 T \left( \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{D_3} \right) + \ln(f(\bar{\epsilon}^p, T)) \right) \right)^{1/D_5} \right]^{1/D_6} f(\bar{\epsilon}^p, T) + D_7 \bar{\epsilon}^{p D_8} \quad (\text{I.46})$$

où la fonction  $f$  est la suivante :

$$f(\bar{\epsilon}, T) = 1 + D_4 \left( 1 - \left( \frac{T}{T_m} \right)^2 \right) \sqrt{\bar{\epsilon}^p} \quad (\text{I.47})$$

Il y a donc huit paramètres  $D_i$  à identifier pour pouvoir utiliser cette loi. La constante  $T_m$  est la température de fusion de l'alliage.

Et enfin, les lois multiplicatives permettent une modélisation de la phase d'écrouissage par la multiplication de lois de comportement simples, toutes dépendantes d'une

variable différente :

$$K_{ecr} = \left( \sigma_0 + Q (1 - \exp(-b\bar{\epsilon}^p)) + \frac{K_0}{T} \bar{\epsilon}^p \right) \exp(\alpha/T) \left( 1 + a_v \ln \left( 1 + \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \quad (\text{I.48})$$

De nombreuses possibilités existent pour modéliser le durcissement mécanique d'un métal lors de sa déformation plastique. Quelques-unes ont été décrites ci-dessus. Dans les codes de calcul, les lois de Norton-Hoff (équation I.44) ou équivalentes sont les plus utilisées, notamment dans le logiciel Forge<sup>®</sup> et Abaqus<sup>®</sup>.

**ii) Modélisation de l'adoucissement** Durant la déformation d'un métal, trois phénomènes sont en concurrence, et leur rôle est plus ou moins important selon la déformation plastique atteinte et la microstructure du matériau. On peut distinguer deux phénomènes responsables de l'adoucissement activé à partir d'un certain niveau de déformation plastique. Ceux ci sont la restauration dynamique et la recristallisation dynamique. La figure I.35 montre l'importance de chaque phénomène lors du chargement plastique d'un matériau. Cette importance est soumise à l'environnement (température) et à la vitesse de la sollicitation mécanique. Cependant, l'adoucissement  $W$ , utilisé dans l'équation I.43, doit modéliser la recristallisation dynamique. Il s'agit du principal phénomène responsable de la chute du niveau de contrainte, par la création d'une nouvelle structure de grains dans un matériau déformé, pour réduire la densité de dislocations.

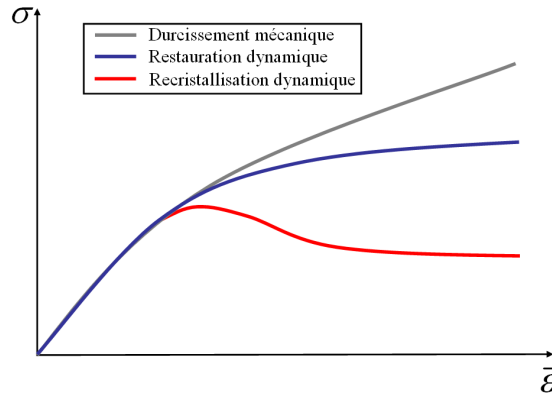


FIGURE I.35 – Illustration schématique de la concurrence entre les phénomènes de durcissement mécanique, de restauration dynamique et de recristallisation dynamique pendant la déformation plastique [Lissel06]

Pour caractériser la cinétique de la recristallisation dynamique, on définit  $W$  comme la fraction de grains recristallisés, donc évoluant entre 0 et 1. Avrami propose un modèle mathématique pour la modélisation de la croissance d'une phase [Touache06] :

$$X_d = 1 - \exp(-r(T, \dot{\epsilon}) \left( \frac{\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_p}{\dot{\bar{\epsilon}}_p} \right)^{n(T, \dot{\epsilon})}) \quad (\text{I.49})$$

Il faut donc déterminer les deux paramètres du matériau  $r$  et  $n$ , permettant la modélisation de la recristallisation dynamique lors de la déformation plastique des alliages de titane. Les lois de comportement étant destinées à une utilisation macroscopique pour la simulation du formage de pièces industrielles, une version simplifiée de la loi d'Avrami avec un seul paramètre  $r$  peut être utilisée [Gavrus96] :

$$X_d = 1 - \exp(-r\bar{\epsilon}^p) \quad (\text{I.50})$$

Cependant cette modélisation peut être affinée avec trois constantes  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$  pour prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation et à la température en posant  $r = (r_0 + \frac{r_1}{T})\dot{\epsilon}^{r_2}$ . La fonction d'adoucissement est donc modélisée par des fonctions simples, dont le caractère est fortement macroscopique. D'autres modèles existent, mais des variables microstructurales interviennent dans la définition de la phase recristallisée. On préférera, dans ce cas, utiliser une loi de comportement à variable interne pour modéliser l'écrouissage isotrope.

### I.3.4 Loi de comportement à variable interne

La principale particularité des modèles à variable interne est leur faculté à tenir compte de l'histoire du matériau, d'un point de vue des déformations plastiques et thermique. Ainsi le cycle thermique et le chemin de déformation suivi par la tôle lors de l'opération de formage sont réellement pris en compte. On suppose que la restauration du matériau activé thermiquement prévaut sur le durcissement dû à l'écrouissage. On distingue les modèles complets modélisant tous les phénomènes microstructuraux ayant trait à la déformation plastique, des modèles simplifiés où la modélisation est envisagée d'un point de vue plus macroscopique.

#### I.3.4.a Les modèles complets

Les modèles complets peuvent prédire à la fois les phénomènes statiques et dynamiques durant la déformation à chaud au niveau de la microstructure [Roucoules01] [Pietrzyk98]. L'équation générale décrit l'évolution de la population de dislocations  $G$  au cours du temps :

$$\frac{\partial G(\rho, \tau)}{\partial t} = \Phi(\Delta\epsilon) - g(\epsilon) - X_{rec}(\rho, t) \quad (\text{I.51})$$

$\Phi(\epsilon)$  représente le stockage athermique des dislocations,  $g(\epsilon)$  l'adoucissement activé thermiquement (restauration) et la fonction  $X_{rec}$  est représentative des changements dus à la recristallisation.

La difficulté d'une modélisation basée sur une variable interne est de différencier tous les phénomènes mis en jeu et leur rôle respectif dans la déformation plastique. En effet la densité de dislocations est en perpétuelle évolution à cause des phénomènes d'écrouissage, de recristallisation et de restauration. Chacun de ceux-ci possède une condition d'activation et une influence sur la densité de dislocations différentes. Le durcissement mécanique au cours de la déformation plastique met en compétition un stockage des dislocations (écrouissage) et une annihilation des dislocations (restauration). Les lois d'évolution des ces deux phénomènes sont résumées dans la table I.6, exprimant l'évolution de la densité de dislocations  $\rho$  en fonction de la déformation plastique  $\epsilon^p$  en fonction du vecteur de Burger  $b$ , du libre parcours moyen  $l$  et de paramètres du matériau  $k_0$  et  $k_2$ . Lorsque la densité de dislocations atteint une valeur critique  $\rho_{cr}$ , la recristallisation est activée, et évolue selon la taille du grain  $D$ , du coefficient de poisson  $\nu$ , de la répartition de la population de dislocations  $G$  et de la densité de dislocations  $\rho$ , ainsi que des paramètres du matériau tels que  $\gamma$ ,  $m$ ,  $\tau$ . Cependant, ces modèles sont trop peu adaptés

Processus	Condition d'activation	Equation d'évolution
Écrouissage	$\dot{\epsilon}^p > 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial \epsilon^p} = \frac{1}{bl}$
Restauration	toujours actif	$\frac{\partial \rho}{\partial \epsilon^p} = k_0 - k_2 \rho$
Recristallisation	$\rho > \rho_{cr}$	$\frac{\partial X_{rec}}{\partial t} = \nu \gamma / D m \tau G \rho$

TABLE I.6 – Influence sur la densité de dislocations des principaux phénomènes présents dans une déformation à chaud

à la simulation de la mise en forme, et des modèles simplifiés ont été développés.

#### I.3.4.b Les modèles simplifiés

Les modèles simplifiés permettent de connaître uniquement l'évolution de la contrainte d'écoulement plastique due à la recristallisation dynamique en fonction de l'état microstructural [Pietrzyk02]. Le principal intérêt de ces lois dans le cadre de l'étude de la mise en forme est de connaître l'écoulement plastique d'une manière macroscopique. Le modèle simplifié est le plus adéquat, car il répond aux attentes et permet une implémentation numérique plus facile. L'équation I.52 permet de relier la contrainte d'écoulement plastique  $\sigma_y$  à une variable interne  $\rho$ , valeur moyenne de la densité de dislocations dans la microstructure.

$$\sigma_y = \sigma_0 + \alpha b \mu \sqrt{\rho} \quad (\text{I.52})$$

où  $\mu$  représente le module de cisaillement, et  $\alpha$  un paramètre du matériau. L'équation (I.53) donne une évolution de la valeur moyenne de la densité de dislocations.

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial t} = \frac{\dot{\epsilon}^p}{bl} - k\dot{\epsilon}^p \rho(\tau)^r R[\rho(\tau) - \rho_{cr}] \quad (\text{I.53})$$

Les paramètres de l'équation sont  $b$  le vecteur de Burger,  $l$  le libre parcours moyen,  $D$  la taille moyenne d'un grain, et  $\rho_{cr}$  la densité de dislocations critique. Les paramètres  $k$  et  $r$  sont déterminés par une procédure d'identification. La fonction  $R$  est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R[\rho(\tau) - \rho_{cr}] &= 0 \quad \forall \rho \leq \rho_{cr} \\ R[\rho(\tau) - \rho_{cr}] &= \rho(\tau - \tau_{cr}) \quad \forall \rho > \rho_{cr} \end{aligned} \quad (\text{I.54})$$

$\tau_{cr}$  est le temps critique. Il existe d'autres fonctions définissant l'évolution de la densité de dislocations  $\rho$ , notamment une forme différentielle établie par Klepaczko [Houillon09] qui met en compétition le taux de création des défauts  $M_{II}$  et le réarrangement de ces derniers grâce à un facteur  $k_a$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \epsilon^p} = M_{II} - k_a \rho \quad (\text{I.55})$$

L'écroutissage isotrope peut être modélisé par des lois de comportement macroscopiques, telles les lois adoucissantes, représentatives des phénomènes microstructuraux. Une variable interne, décrivant l'état microstructural du matériau, peut aussi être utilisée pour caractériser le comportement macroscopique.

## I.4 Conclusion du chapitre

Les alliages de titane permettent un gain de poids pour des propriétés mécaniques équivalentes à celles d'un acier, ce qui engendre l'augmentation de son utilisation dans l'industrie aéronautique. L'utilisation de ces alliages est donc en forte progression dans la conception d'un avion, et notamment grâce à l'introduction massive des matériaux composites dans les structures. La simulation de la mise en forme à froid des alliages de titane  $\alpha$  impose de connaître leur comportement microstructural lors d'une déformation plastique pour choisir une modélisation adéquate. Les alliages de titane, notamment les alliages  $\alpha$ , ont un comportement plastique fortement anisotrope. Celui-ci est le résultat de sa structure cristalline, et est amplifié par l'opération de laminage à froid précédant les phases de mise en forme des tôles. Les réseaux cristallins des alliages de cette étude sont hexagonaux compacts, et la déformation plastique est le résultat de phénomènes microstructuraux, tels que le glissement et le maclage. De par leurs propriétés cristallines, le plan de glissement principal est le plan prismatique, orienté par le vecteur  $\vec{c}$ , les plans basaux et pyramidaux sont des plans de glissement secondaires. On observe trois types de maclage lors de la déformation plastique des alliages de titane de l'étude, deux apparaissant lors d'une sollicitation en traction et un en compression. L'orientation de l'axe  $\vec{c}$  de la maille hexagonale compacte détermine le type de maclage auquel va être soumis le grain. Des macles secondaires peuvent apparaître dans des macles primaires dans un même grain pour garder un état stable.

La modélisation du comportement plastique des alliages de titane doit prendre en compte les spécificités microstructurales de celui-ci. Une loi d'élasticité, un critère de plasticité, et des lois d'écrouissage cinématique et isotrope doivent être définis. Concernant l'élasticité, un comportement isotrope dicté par la loi de Hooke (équation I.2) sera défini grâce au module de Young et au coefficient de Poisson. Le critère de plasticité ne peut plus considérer un comportement isotrope, au vu de la microstructure de ces alliages. Les critères anisotropes de Hill quadratique (équation I.8) et le critère de Cazacu (équation I.34), développé spécifiquement pour les matériaux à structure hexagonale compacte, seront choisis pour la modélisation des alliages de titane. L'écrouissage cinématique permettant la prise en compte de l'effet Bauschinger sera modélisé par une loi d'Armstrong-Frederick (équation I.37) à deux paramètres. Ce choix se justifie car au cours des chemins de déformation que peut subir la tôle lors d'une mise en forme complexe, le nombre de charge-décharge reste réduit et raffiner le modèle en tenant compte des évolutions microstructurales implique la réalisation d'essais cycliques. Pour l'écrouissage isotrope, une loi macroscopique tenant compte de l'adoucissement dû à la recristallisation dynamique sera utilisée, car elle propose un bon rapport entre la précision de la modélisation et une procédure d'identification simple à mettre en oeuvre.

La procédure d'identification à mettre en place pour la caractérisation de tous les paramètres doit être réfléchi lors de la mise en place du modèle afin de choisir une modélisation intégrant précision et facilité de mise en oeuvre. En effet l'adéquation théorique du modèle choisi avec les phénomènes responsables de la déformation plastique et la qualité de la détermination des paramètres doit permettre d'utiliser la modélisation la plus fiable en vue du calcul éléments finis.

# Chapitre II

## La formulation du modèle continu anisotrope en grandes transformations

Comme vu précédemment, un comportement anisotrope est lié à une direction de sollicitation, et la réponse mécanique du matériau dépend de celle-ci. L'utilisation d'un modèle anisotrope implique donc d'ajouter la notion d'orientation des axes d'anisotropie au cours de la transformation lors de la formulation du modèle continu. Dans le chapitre [I](#), le comportement plastique et les modèles permettant de le modéliser ont été décrits. Ce chapitre va permettre la mise en place du modèle, à travers la gestion et le suivi des axes d'orientation. Implémenter un modèle anisotrope sans s'intéresser à sa formulation peut mener à l'obtention de résultats non-physiques. A partir de ce constat, une formulation générale utilisable pour un milieu continu anisotrope en grandes transformations doit être établie, avec une prise en compte de l'évolution des directions d'anisotropie. L'objectif de ce chapitre est donc de décrire l'environnement du modèle anisotrope, après avoir défini le comportement macroscopique à l'aide de lois. Cette formulation est basée sur la théorie des grandes transformations élasto-plastiques, dont les grands principes seront détaillés (section [II.1](#)) pour faciliter la compréhension du modèle. Il en découlera une réflexion sur l'évolution de la direction des axes d'anisotropie lors du formage de produits minces, afin d'être le plus réaliste possible. La formulation du modèle sera explicitée, pour un comportement élasto-plastique anisotrope, et utilisable quelque soit le critère de plasticité et les lois d'écrouissage choisis.



## II.1 Mécanique des grandes transformations

La mécanique des grandes transformations permet la simulation des procédés de mise en forme, au cours desquelles des grands déplacements entrent en jeu. Toute transformation d'un solide est caractérisée par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , qui permet de déterminer la position et l'orientation d'un vecteur quelconque après la transformation, à partir de ses coordonnées initiales. Le vecteur  $\vec{X}$  appartenant au solide à l'état initial subit un vecteur déplacement  $\vec{u}$  au cours de la transformation. Le vecteur  $\vec{x}$  caractérisant l'état final peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad (\text{II.1})$$

Le gradient de la transformation est donc défini par la relation suivante :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (\text{II.2})$$

Le gradient de la transformation est la base de la théorie de la mécanique des grandes déformations, et toutes les relations découlent de celui-ci.

### II.1.1 Relations de base

Toute transformation d'un solide peut être décomposée en un mouvement de corps rigide (translation et rotation) et un changement de forme. On ne considérera comme mouvement rigide uniquement les rotations de corps rigide, caractérisées par la matrice de rotation  $[\mathbf{R}]$ . Le changement de forme est défini par le tenseur de déformation pure droit  $[\mathbf{U}]$  ou gauche  $[\mathbf{V}]$  suivant que l'on considère que la transformation se compose d'une rotation  $[\mathbf{R}]$ , puis d'une déformation  $[\mathbf{V}]$ , ou d'abord une déformation  $[\mathbf{U}]$  puis une rotation  $[\mathbf{R}]$  (Fig. II.1). Dans la suite, on utilisera le tenseur de déformation pure droit  $[\mathbf{U}]$  pour établir les relations liant la transformation et le tenseur des vitesses de déformations. La décomposition polaire considérée sera donc la suivante :

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{R}][\mathbf{U}] = [\mathbf{V}][\mathbf{R}] \quad (\text{II.3})$$

Le tenseur de Cauchy-Green droit  $[\mathbf{C}]$ , dont les racines carrées des valeurs principales expriment les dilatations  $\lambda_i$  suivant les axes principaux, est introduit par la relation

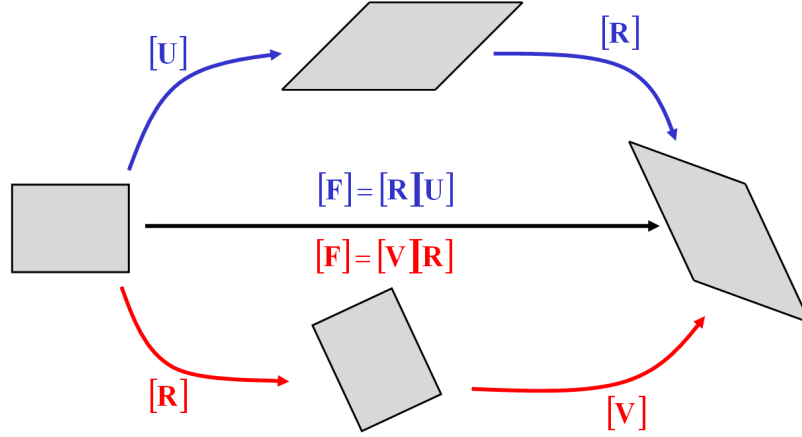


FIGURE II.1 – Décomposition polaire d’une transformation, par l’intermédiaire d’une matrice de rotation rigide  $[\mathbf{R}]$ , et d’un tenseur de déformation pure droit  $[\mathbf{U}]$  ou gauche  $[\mathbf{V}]$

suivante :

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] \quad (\text{II.4})$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Le tenseur des taux de déformation lagrangien  $[\mathbf{L}]$  est calculé par la relation suivante :

$$[\mathbf{L}] = [\dot{\mathbf{F}}] [\mathbf{F}]^{-1} \quad (\text{II.6})$$

On peut décomposer ce dernier tenseur en une partie symétrique  $[\mathbf{D}]$  et une autre antisymétrique  $[\mathbf{W}]$  définies par les relations suivantes :

$$[\mathbf{D}] = \frac{1}{2} ([\mathbf{L}] + [\mathbf{L}]^T) \quad (\text{II.7})$$

$$[\mathbf{W}] = \frac{1}{2} ([\mathbf{L}] - [\mathbf{L}]^T) \quad (\text{II.8})$$

A partir de l’équation II.6, on peut remonter à la dépendance du tenseur des taux de déformations  $[\dot{\epsilon}]$  avec le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  :

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{1}{2} ([\dot{\mathbf{F}}] [\mathbf{F}]^{-1} + [\mathbf{F}]^{-T} [\dot{\mathbf{F}}]^T) \quad (\text{II.9})$$

Ces relations sont la base de la mécanique des grandes transformations. La seule donnée nécessaire est le tenseur du gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  pour pouvoir établir la formulation du milieu continu anisotrope.

### II.1.2 Décomposition élasto-plastique

Lorsque l'on considère une transformation élasto-plastique, on considère un comportement mécanique est pour une part purement élastique et d'autre part plastique. On peut séparer, comme sur la figure II.2, toutes transformations élasto-plastiques en une partie plastique et élastique. On peut décomposer, tout comme la décomposition

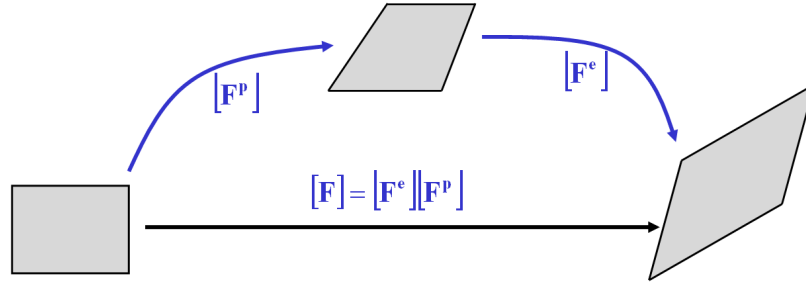


FIGURE II.2 – Décomposition de la transformation en partie plastique et élastique

polaire (équation II.1), la transformation  $[\mathbf{F}]$  en une transformation purement plastique contrôlée par  $[\mathbf{F}]^p$  et une transformation purement élastique  $[\mathbf{F}]^e$  (Fig.II.2) :

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{F}]^e [\mathbf{F}]^p \quad (\text{II.10})$$

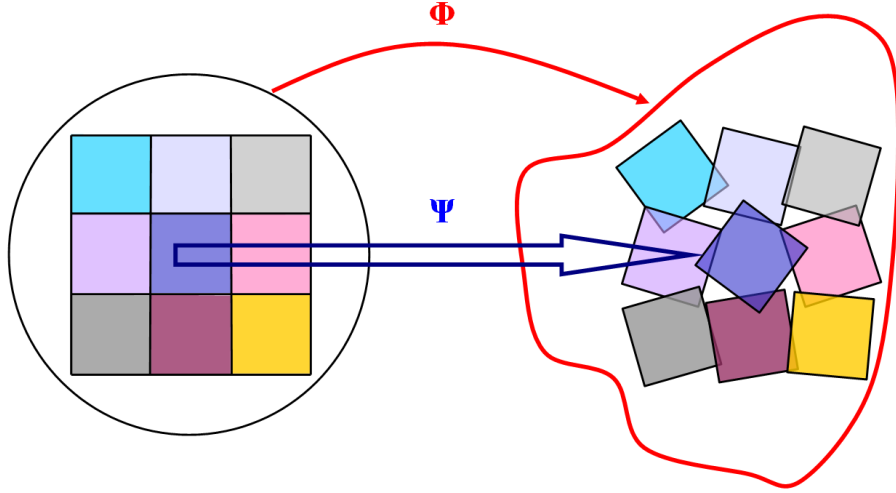
On peut donc calculer le tenseur des taux de déformations en fonction des parties plastique et élastique [Harrysson07b] [Harrysson07a] :

$$[\mathbf{L}] = \underbrace{[\dot{\mathbf{F}}]^e [\mathbf{F}]^{e-1}}_{[\mathbf{L}]^e} + [\mathbf{F}]^e \underbrace{[\dot{\mathbf{F}}]^p [\mathbf{F}]^{p-1}}_{[\mathbf{L}]^p} [\mathbf{F}]^{e-1} = [\mathbf{L}]^e + [\mathbf{F}]^e [\mathbf{L}]^p [\mathbf{F}]^{e-1} \quad (\text{II.11})$$

Cette décomposition élasto-plastique n'est pas l'unique existante. L'inverse peut aussi être utilisé, à savoir :

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{F}]^p [\mathbf{F}]^e \quad (\text{II.12})$$

L'expression du taux de déformation associé à cette décomposition implique une transformation par le gradient de la transformation plastique du taux de déformation élastique, contrairement à la décomposition précédente. Notre choix s'est porté sur la première décomposition, qui exprime le taux de déformation élastique d'une manière directe. Avec cette supposition, on peut essayer d'exprimer à chaque instant le gradient de la transformation élastique pour pouvoir à chaque instant connaître le retour élastique.

FIGURE II.3 – Représentation du solide suiveur  $\Psi$  lors de la transformation  $\Phi$ 

### II.1.3 Le suivi de la transformation élasto-plastique

La notion d'anisotropie impose le suivi de la transformation, notamment afin de garder la direction des axes d'anisotropie, pour calculer le comportement mécanique. On trouve dans la littérature plusieurs variables, microscopiques où macroscopiques, issues de la théorie des grandes transformations qui permettent le suivi de la transformation. La définition de cette matrice de rotation  $[\Psi]$  en fonction de la transformation fixera l'évolution de la direction des axes d'anisotropie. La notion de suivi de la transformation en deux dimensions est illustrée sur la figure II.3 lors d'une transformation  $\Phi$ . Il faut donc avoir une grandeur représentative de la transformation pour garder la cohérence entre l'état initial et l'état final [Hagège04]. Pour ce faire, plusieurs transformations, ainsi que leurs dérivées associées seront détaillées dans la suite de cette section. La dérivée objective permet de calculer la dérivée de la grandeur, exprimée dans un repère mobile par rapport à un référentiel fixe. On parle d'objectivité, car appliquer cette dérivée permet de s'absoudre de la notion de référentiel.

#### II.1.3.a La transformation de Green Naghdi

Le solide suiveur de Green-Naghdi est basé sur la rotation moyenne de la matière  $[\mathbf{R}]$  au sein d'un milieu continu, issu de la décomposition polaire (équation II.3). Le suivi de la transformation est donc guidé par une matrice de rotation orthogonale  $[\mathbf{R}]$  qui est l'image de la rotation rigide induite par la transformation  $[\mathbf{F}]$ . La transformation

de Green-Naghdi est donc obtenue par :

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}][\mathbf{U}]^{-1} \quad (\text{II.13})$$

La dérivée objective d'un tenseur  $[\mathbf{A}]$  associée à ce solide suiveur est la dérivée objective de Green-Naghdi, permet le calcul de la dérivée de  $[\mathbf{A}]$ , exprimé dans la base de Green-Naghdi par rapport à un référentiel fixe :

$$[\overset{\nabla}{\mathbf{A}}] = [\dot{\mathbf{A}}] - [\dot{\mathbf{R}}] [\mathbf{R}]^T [\mathbf{A}] + [\mathbf{A}] [\dot{\mathbf{R}}] [\mathbf{R}]^T \quad (\text{II.14})$$

La transformation de Green-Naghdi permet un suivi global de la matière par la rotation rigide. Les axes d'anisotropie restent donc orthogonaux à chaque instant.

### II.1.3.b La transformation de Jaumann

Les repères des axes d'anisotropie, réactualisés par la transformation de Jaumann suivent localement le "spin" de la matière, qui est la partie antisymétrique  $[\mathbf{W}]$  (équation II.8) du gradient des vitesses  $[\mathbf{L}]$ . Dans ce référentiel, les axes d'anisotropie restent perpendiculaires deux à deux, à tout instant de la transformation. On peut noter que le solide suiveur est dérivé du solide suiveur de Green-Naghdi, le "spin" de la matière s'exprimant en fonction de la rotation rigide  $[\mathbf{R}]$  :

$$[\mathbf{W}] = [\dot{\mathbf{R}}][\mathbf{R}]^T \quad (\text{II.15})$$

La dérivée objective d'un tenseur, dont la grandeur est réactualisée par le spin de la matière, est la dérivée de Jaumann :

$$[\overset{\circ}{\mathbf{A}}] = [\dot{\mathbf{A}}] - [\mathbf{W}][\mathbf{A}] + [\mathbf{A}][\mathbf{W}] \quad (\text{II.16})$$

Le suivi de la transformation par la transformation de Jaumann conserve l'orthogonalité du repère des axes d'anisotropie.

### II.1.3.c Le "spin" de Mandel

Duchène *et al.* [Duchêne08] utilise un suivi de la transformation basé sur un modèle cristallin pour la réactualisation des axes d'anisotropie. Celle-ci est basée sur le spin de Mandel, qui représente une rotation moyenne du polycristal, à partir de la rotation de tous les grains présents dans le polycristal. La difficulté principale consiste à déterminer

la rotation du milieu continu à partir des rotations de chaque grain, calculées à partir d'un modèle micromécanique. Des déviations d'environ  $10^\circ$  ont été observées entre le modèle numérique et la théorie pour le test du cisaillement simple. De plus, l'utilisation d'une telle méthode implique l'utilisation d'une loi de comportement basée sur l'analyse microstructurale du matériau et notamment de sa texture. La modélisation envisagée se limitant au niveau macroscopique, cette transformation n'est donc pas adaptée à cette étude.

### II.1.3.d Le solide suiveur global

Le suivi de la transformation, le plus représentatif de la transformation globale, est tout simplement dérivé du gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ . En effet, en appliquant cette transformation sur un vecteur quelconque, on obtient l'image de ce dernier transformé par  $[\mathbf{F}]$ . Le suivi des axes d'anisotropie par cette transformation permet de conserver une orientation moyenne, représentative de la transformation subie par le milieu continu. Cependant, il est important de rester avec des vecteurs directeurs unitaire, afin de simplifier les écritures dans la suite de ce manuscrit. De plus, l'utilisation de cette transformation implique la perte de l'orthogonalité du repère déformé. Le fait de travailler avec une base non orthogonale impose de revenir à la base de la théorie des grandes déformations.

## II.2 L'environnement du modèle continu anisotrope

Après avoir présenté brièvement la théorie des grandes transformations et les principes à respecter pour obtenir une modélisation fiable et physique, l'environnement du modèle, c'est-à-dire la cinématique et les outils de représentation de l'espace, va être détaillé. Les hypothèses générales seront exposées, et à partir de celles-ci, des choix de modélisation seront faits, en termes de grandeurs utilisées pour le suivi de la transformation et d'objectivité. Tous les choix seront justifiés d'une manière concrète sur un test de cisaillement d'un matériau purement élastique anisotrope.

### II.2.1 Hypothèses générales

*i) Les axes représentatifs du modèle* La modélisation d'un comportement anisotrope implique la nécessité du suivi des axes d'anisotropie au cours de la transfor-

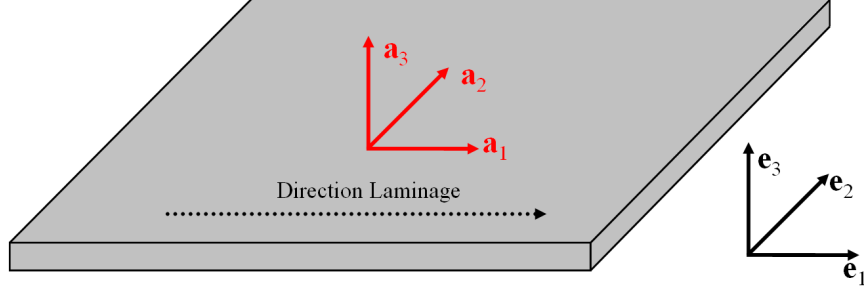


FIGURE II.4 – Positionnement initial des base matériau  $\langle \{\mathbf{a}\}_i, i = 1, 2, 3 \rangle$  et référence  $\langle \{\mathbf{e}\}_i, i = 1, 2, 3 \rangle$

mation. On définit donc deux repères différents, un repère de référence que l'on notera  $\langle \{\mathbf{e}\}_i, i = 1, 2, 3 \rangle$  et un repère local, attaché au matériau, noté  $\langle \{\mathbf{a}\}_i, i = 1, 2, 3 \rangle$ . Le repère de référence est orthonormé et fixe durant toute la transformation, tandis que la base "matériau" est réactualisée par la transformation choisie. On considère une orthotropie initiale, due à l'opération de laminage à froid. Ce modèle se destinant à la simulation du formage de produits minces, on considère que l'axe  $\vec{a}_3$  est initialement normal à la tôle. Par convention dans la suite de ce manuscrit, la direction 3 d'anisotropie restera toujours normale au plan de la tôle.

**ii) Un modèle destiné à la mise en forme de produits minces** Cette modélisation ayant pour but la simulation des procédés de mise en forme des produits minces, on suppose que les géométries initiales sont planes ou cylindriques, dans le cas de mise en forme de tubes. Cette hypothèse implique une même définition initiale des axes d'anisotropie pour toute la pièce. La direction de laminage est considérée comme la direction référence pour permettre l'orientation initiale de la tôle. L'orientation initiale de l'anisotropie sera définie par les deux axes  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  dans le repère de référence (Fig. II.4).

**iii) Les lois de comportement** Les lois de comportement, comme le critère de plasticité anisotrope et les lois d'écrouissage, seront exprimées dans la base locale  $\langle \{\mathbf{a}\}_i, i = 1, 2, 3 \rangle$ . A chaque instant de la transformation, les lois de comportement seront liées aux directions d'anisotropie. Cette hypothèse permet de définir précisément le comportement et surtout totalement dépendant de l'orientation des axes d'anisotropie.

## II.2.2 Le suivi des axes d'anisotropie

La modélisation du comportement plastique des alliages de titane implique le suivi des axes d'anisotropie au cours de la transformation. Les solides suiveurs ont été détaillés dans le paragraphe II.1.3. Le solide suiveur le plus efficace est le suiveur basé sur la rotation du cristal [Duchêne08], qui reproduit au plus juste les mouvements microstructuraux de la structure. Cependant, l'utilisation de cette réactualisation des axes, pour la mise en forme de pièce industrielle, c'est-à-dire d'un point de vue microscopique n'est peu adaptée, car sa mise en oeuvre implique l'utilisation de lois de comportement microscopiques. En effet, des calculs micromécaniques sont nécessaires pour déterminer les orientations de chaque grain afin de déterminer l'orientation moyenne du milieu continu. D'un point de vue mise en oeuvre pour la simulation de pièce industrielle, les calculs deviennent trop important et le temps de calcul très grand. De plus, une déviation d'environ  $10^\circ$  est observé pour le test du cisaillement simple.

En restant d'un point de vue macroscopique, on peut réactualiser les axes d'anisotropie par les variables macroscopiques que sont le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , et la rotation moyenne  $[\mathbf{R}]$ , issue de la décomposition polaire. De nombreux logiciels de calcul utilise  $[\mathbf{R}]$  afin de conserver un repère d'anisotropie orthogonal à chaque instant. Pour évaluer l'importance du choix de telle ou telle réactualisation des axes d'anisotropie, un cas analytique classique, le cisaillement simple, va être étudié.

### II.2.2.a La réactualisation des axes dans le cas du cisaillement simple

Le test du cisaillement simple est un test classique pour l'analyse des formulations en mécanique des grandes transformations. Il permet d'illustrer les formulations construites et de les comparer entre elles. Deux avantages permettent d'expliquer l'utilisation de ce test pour la mise en place de modèle :

- la solution du problème est simple et homogène. Des solutions analytiques peuvent être calculées à partir du modèle choisi.
- le cisaillement simple présente une rotation rigide moyenne  $[\mathbf{R}]$  évolutive dans le temps. Cette transformation permet de confronter les formulations aux problèmes liés à l'actualisation des grandeurs tensorielles, qui doit prendre en compte cette rotation de corps rigide.

Le test de cisaillement est donc la base pour la formulation utilisée lors de la modélisation d'un comportement anisotrope. On s'appuiera sur les résultats obtenus analytiquement pour déterminer la méthode la plus réaliste de réactualisation des axes d'anisotropie, et pour vérifier l'objectivité de la formulation. On appelle cisaillement



simple, test représenté sur la figure II.5, une sollicitation de cisaillement sans déformation des faces orientées normalement à la direction de la sollicitation. Le paramètre utilisé lors de la transformation de cisaillement simple est la distance  $\gamma$ . On suppose que la face du parallélépipède orientée par  $\vec{e}_3$  est de dimension unitaire.

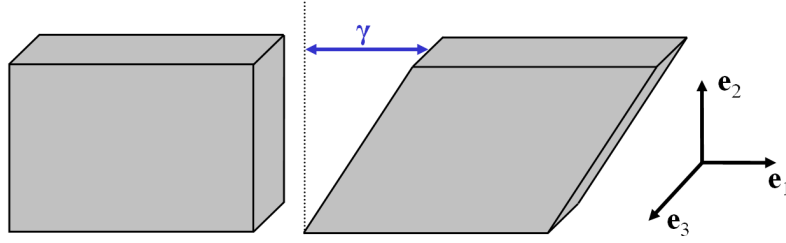


FIGURE II.5 – Cisaillement simple d'un parallélépipède de face unitaire

**i) Cinétique du cisaillement simple** Tous les points du parallélépipède cisailé subissent la même transformation, fonction de sa position initiale  $\{\mathbf{X}\}$ . On peut trouver sa position finale en écrivant le vecteur déplacement, en considérant des dimensions unitaires pour la face avant :

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} \gamma X_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Le gradient de la transformation peut être obtenu dans la configuration initiale, à partir du vecteur déplacement :

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

La transformation est bien homogène,  $[\mathbf{F}]$  ne dépend pas des coordonnées du point matériel étudié. À partir du gradient de la transformation, on peut calculer le tenseur de Cauchy-Green droit  $[\mathbf{C}]$  (équation II.5). En diagonalisant ce dernier, on peut remonter au tenseur des déformations  $[\mathbf{U}]$  :

$$[\mathbf{U}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2/4}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 1 + \frac{\gamma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

La matrice de rotation rigide  $[\mathbf{R}]$  est donc calculable, à partir de la décomposition

polaire (équation II.1) :

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}][\mathbf{U}]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2/4}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

**ii) Comparaison des réactualisations des axes d'anisotropie** On peut donc maintenant comparer la différence sur les directions d'anisotropie de l'effet d'une réactualisation par  $[\mathbf{F}]$  ou par  $[\mathbf{R}]$ . Les axes d'anisotropie avant la transformation sont nommés  $\vec{a}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), et après leur réactualisation  $\vec{g}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) par la matrice de rotation  $[\mathbf{R}]$ , ou  $\vec{f}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ . Les repères à l'issue de la transformation de cisaillement sont normés pour comparer uniquement l'orientation des directions d'anisotropie.

On suppose, tout d'abord, que les axes d'anisotropie sont initialement confondus avec les axes de référence  $\vec{e}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Suivant la réactualisation, on observe les évolutions suivantes :

- La réactualisation par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  implique que les axes d'anisotropie se déforme avec les cotés de la face déformée. En chaque instant, on a donc, exprimé dans le repère de référence :

$$\vec{f} = [\mathbf{F}]\vec{a} \quad (\text{II.21})$$

$$\{\mathbf{f}\}_i = \begin{Bmatrix} a_{ix} + \gamma a_{iy} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

- La réactualisation des axes d'anisotropie par la matrice de rotation rigide  $[\mathbf{R}]$  implique l'orientation suivante pour les vecteurs  $\vec{g}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) :

$$\vec{g} = [\mathbf{R}]\vec{a} \quad (\text{II.23})$$

$$\{\mathbf{g}\}_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2/4}} \begin{Bmatrix} a_{ix} + a_{iy} \frac{\gamma}{2} \\ -a_{ix} \frac{\gamma}{2} + a_{iy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

La figure II.6 permet d'illustrer la réactualisation des axes d'anisotropie au cours de la transformation de type cisaillement simple. On remarque que les axes  $\vec{f}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) suivent la déformée de la face, et notamment l'axe 1 reste fixe et ne subit aucune déformation durant toute la transformation, tandis que les axes  $\vec{g}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) ne tiennent pas compte de la déformée de la matière, mais de la rotation rigide moyenne.

La figure II.6 montre l'évolution des axes réactualisés par  $[\mathbf{R}]$ . L'axe orienté initialement suivant la direction de laminage subit une rotation, qui le désoriente fortement. Après un cisaillement important, l'axe représentant l'évolution de la direction de laminage est totalement désorienté par rapport à celle-ci. Pour des valeurs de cisaillement important, la représentation de la direction transverse par l'axe  $\vec{g}_2$  se rapproche de la direction de laminage de la tôle. Cet exemple montre bien l'inadéquation entre le suivi de la transformation en terme d'orientation et la matrice de rotation rigide.

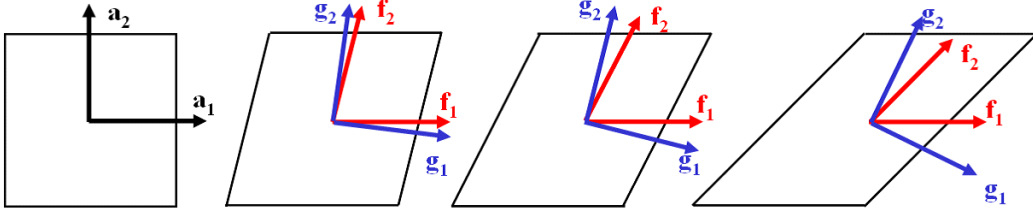


FIGURE II.6 – Réactualisation des axes d'anisotropie, initialement  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ , lors du test de cisaillement simple

Si on réalise la même étude pour des axes d'anisotropie initialement orientés à  $45^\circ$ , donc suivant les diagonales de la face initiale, on observe des différences, uniquement pour les grandes transformations (Fig. II.7). Cependant, les orientations des deux jeux d'axes sont très proches. Pour les petites déformations, la réactualisation par le gradient de la transformation ou par la rotation moyenne rigide sont quasi semblables. Le suivi de la transformation n'a que très peu d'importance dans cet exemple.

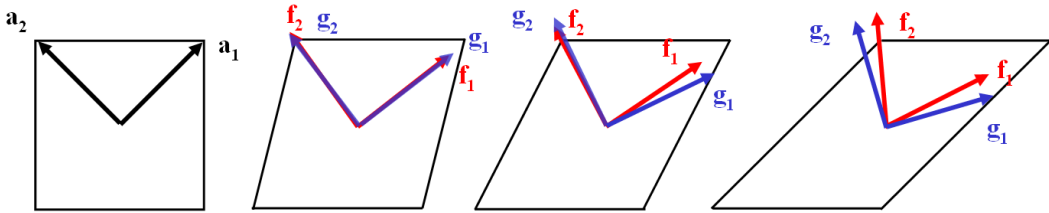


FIGURE II.7 – Réactualisation des axes d'anisotropie, initialement  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ , lors du test de cisaillement simple

Le test du cisaillement simple montre bien la difficulté de choisir une transformation pour suivre les axes d'anisotropie. Suivant le cas envisagé, les conclusions peuvent être différentes. En se basant sur ces deux exemples, le choix de la transformation pour la réactualisation des axes d'anisotropie se porte sur le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , notamment pour permettre un suivi de la matière par le repère local.

### II.2.2.b La réactualisation des axes dans la formulation anisotrope

Les études analytiques réalisées sur le test du cisaillement simple ont permis d'effectuer un choix pour le suivi des axes d'anisotropie dans notre formulation anisotrope. L'utilisation du gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  permet une réactualisation plus réaliste des axes d'anisotropie, qui vont suivre la déformation du solide. L'utilisation de la rotation moyenne  $[\mathbf{R}]$  n'est réaliste que pour certaines orientations initiales, et ne peut donc pas apporter toutes les garanties en terme de précision sur les grandeurs transportées. Les nombreux paramètres des modèles anisotropes nécessitent des essais expérimentaux pour la procédure d'identification, et parmi ceux-là, le test de cisaillement simple est très utilisé, d'où la nécessité d'avoir un suivi des directions d'anisotropie fidèle à la déformation.

Les axes d'anisotropie seront donc réactualisés au cours de la transformation par les relations suivantes, avec les indices 'n' et 'n+1' signifiant l'incrément et  $[\mathbf{F}]^n$  le gradient de la transformation pour l'incrément n :

$$\begin{aligned} a_1^{n+1} &= [\mathbf{F}]^n a_1^n \\ a_2^{n+1} &= [\mathbf{F}]^n a_2^n \\ a_3^{n+1} &= a_1^n \wedge a_2^n \end{aligned} \tag{II.25}$$

Les deux axes d'anisotropie contenus dans le plan de la tôle, sont réactualisés par le gradient de la transformation. Le troisième axe reste normal aux deux premiers et donc, est dirigé selon la normale à la tôle. Cet axe permet d'obtenir des informations concernant l'épaisseur de la tôle à chaque instant. L'inconvénient d'une telle réactualisation est que la base matérielle n'est plus orthogonale, en effet les deux axes  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  ne sont plus normaux entre eux, car réactualisés par une variable dépendante de la déformation. Notre choix d'exprimer les contraintes dans un tel repère découle des travaux récents en structures composites [Peng05] ou d'autres plus anciens sur le formage des structures fines en grandes transformations [Mattiasson83] [Massoni87]. Des attentions toutes particulières doivent être portées sur les grandeurs tensorielles et les repères du modèle pour travailler avec une formulation mathématiquement correcte.

### II.2.3 Le transport des grandeurs tensorielles

Travailler avec des grandeurs tensorielles dans un repère non orthogonal implique une modification des formules usuelles en mécanique, notamment lors des changements de base pour les contraintes et les déformations. A travers cette section, la mise en place

du modèle dans l'espace euclidien, et les différentes relations, utilisées par la suite, seront explicitées.

### II.2.3.a Les repères du modèle

Deux bases doivent être définies dans la formulation anisotrope, la base matérielle  $\langle \{\mathbf{a}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  et la base de référence  $\langle \{\mathbf{e}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ . La base de référence permet la résolution des équations d'équilibre, car elle est fixe dans le temps et commune à tout le solide. La base matérielle est représentative de l'évolution de l'orientation des directions d'anisotropie au cours de la transformation. Les choix faits précédemment, notamment sur la réactualisation des axes d'anisotropie, impose la non orthogonalité de la base locale, et la notion de variance prend toute son importance lors de la création des repères. La variance est une propriété qui définit le transport d'un tenseur entre deux repères différents. Il est impératif que toutes les bases du modèle soient normées, pour faciliter l'écriture des changements de base.

On définit donc les repères du modèle, à chaque instant de la transformation (Fig. II.8). Une base euclidienne de dimension 3  $\langle \{\mathbf{e}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ , est le repère de référence et est fixe dans le temps. La construction de celle-ci est directe. Cependant, la base de référence euclidienne peut être définie dans certains logiciels (Abaqus<sup>®</sup>, ...) comme la base tournante de Green-Naghdi, orientée par la rotation moyenne  $[\mathbf{R}]$ . Pour l'implémentation dans le logiciel Forge<sup>®</sup>, on considèrera comme base de référence, le repère fixe attaché au référentiel terrestre. Une base covariante  $\langle \{\mathbf{a}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  est construite par les vecteurs directeurs des directions d'anisotropie à chaque instant. Elle est donc fortement liée à la déformation du solide, et ses axes ne sont plus orthogonaux. Cette dernière propriété impose la définition de la notion de variance pour chaque base non euclidienne, qui permet de définir les transports qui respectent la théorie des grandes transformations pour les grandeurs tensorielles. La troisième base  $\langle \{\mathbf{a}^i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ , base duale de  $\langle \{\mathbf{a}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  est contravariante. Sa construction respecte les conventions du calcul tensoriel, et est définie par la relation suivante, avec  $\delta_{ij}$  symbole de Kronecker :

$$\vec{\mathbf{a}}_i \vec{\mathbf{a}}^j = \delta_{ij} \quad (\text{II.26})$$

Les repères de la formulation anisotrope étant construits, chaque grandeur tensorielle doit être attachée à une base.

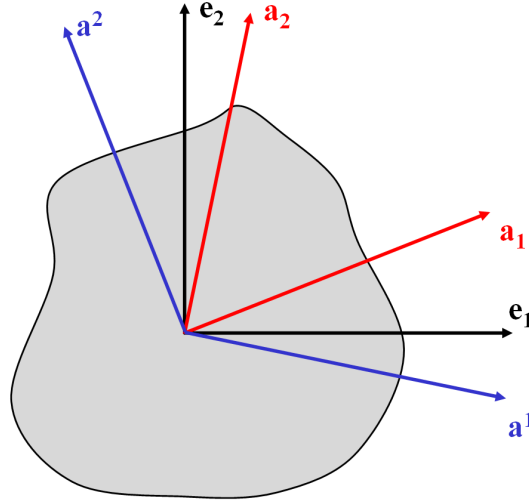


FIGURE II.8 – Représentation des différents repères nécessaires à la formulation anisotrope

### II.2.3.b Les grandeurs tensorielles

Travailler dans des bases non orthogonales oblige la prise en compte de la notion de variance des grandeurs tensorielles. Les tenseurs attachés à un repère orthonormé, qui est à la fois covariant et contravariant, sont transparents à cette notion. Avec une réactualisation des axes d'anisotropie par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , on ne peut plus occulter cette propriété des tenseurs. Tous les tenseurs se rapportant à la notion de déformations, c'est-à-dire le déviateur des déformations  $[\epsilon]$  et le déviateur des vitesses de déformation  $[\dot{\epsilon}]$ , seront considérés comme des tenseurs à composantes covariantes, et exprimés dans la base contravariante  $\langle \{\mathbf{a}^i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ . Le tenseur d'ordre deux est donc défini par :

$$[\epsilon] = \epsilon_{ij} \vec{\mathbf{a}}^i \otimes \vec{\mathbf{a}}^j \quad (\text{II.27})$$

Les tenseurs exprimant la notion de contrainte, comme le déviateur des contraintes  $[\mathbf{S}]$ , ont des composantes contravariantes, attachés à une base covariante  $\langle \{\mathbf{a}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ . Leur écriture est donc la suivante :

$$[\mathbf{S}] = S^{ij} \vec{\mathbf{a}}_i \otimes \vec{\mathbf{a}}_j \quad (\text{II.28})$$

Dans la suite de ce manuscrit, on parlera de tenseur covariant, pour ceux définis par l'équation II.27 et de tenseur contravariant pour l'équation II.28.

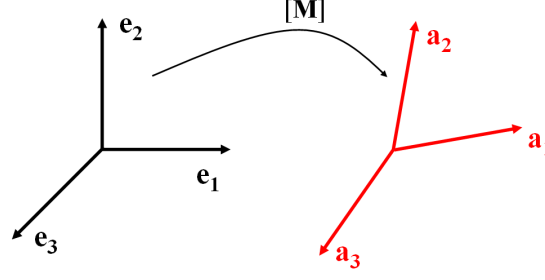


FIGURE II.9 – Matrice de changement de base  $[M]$  pour la transport entre la base de référence  $\langle \{e_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  et la base locale  $(0, \vec{a}_i, i=1, 2, 3)$

### II.2.3.c Les transports associés aux grandeurs tensorielles

Les grandeurs tensorielles doivent être transportées entre la base de référence  $\langle \{e_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  et les deux bases matérielles  $\langle \{a_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  et  $\langle \{a^i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ , pour les besoins de l'implémentation du modèle anisotrope dans un logiciel éléments finis. Dans ceux-ci, les déformations sont calculées dans le repère de référence et les lois de comportement sont exprimées dans le repère local. Des transports doivent être définis, en fonction des directions d'anisotropie. La matrice de changement de base  $[M]$  entre le repère de référence et la base locale covariante (Fig.II.9) s'exprime en fonction des composantes des vecteurs directeurs des directions d'anisotropie  $a_i$  :

$$[M] = \begin{bmatrix} a_1(x) & a_2(x) & a_3(x) \\ a_1(y) & a_2(y) & a_3(y) \\ a_1(z) & a_2(z) & a_3(z) \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Le transport d'un tenseur  $[X]$  d'un repère de référence vers un repère local, respectivement notés "ref" et "loc" par une matrice de changement de base  $[M]$  nécessite l'application des principes de calcul tensoriel. Deux opérations sont possibles, il s'agit d'une opération de "push forward" et de "pull back". La relation "push forward" transforme une quantité relative à la configuration de référence à la configuration locale, tandis que la relation "pull back" produit l'opération inverse. Suivant la variance du tenseur, on utilise des formules de changement de base différentes [Holzapfel00]. Pour un tenseur à composantes covariantes  $[X]$ , tel le déviateur des taux de déformation, on applique les formulations suivantes :

$$\begin{aligned} [X]_{mat} &= [M]^T [X]_{ref} [M] \\ [X]_{ref} &= [M]^{-T} [X]_{mat} [M]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Pour un tenseur avec des composantes contravariantes, les changements de base

différent et suivent les formulations suivantes :

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}]_{mat} &= [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{X}]_{ref} [\mathbf{M}]^{-T} \\ [\mathbf{X}]_{ref} &= [\mathbf{M}] [\mathbf{X}]_{mat} [\mathbf{M}]^T \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Les relations présentées ci-dessus sont valables pour le transport des tenseurs. Cependant, pour faciliter l'implémentation numérique, la notation de Voigt est utilisée (équation 1). Pour pouvoir appliquer les changements de base, les matrices de changement de base ont été transformées en matrice 6x6 pour chacun des cas. Les déformations doivent être transportées de la base de référence à la base locale. Les indices  $i$  et  $j$  se rapportent au repère matériau et les indices  $k$  et  $l$  au repère de référence :

$$[\epsilon] = \epsilon_{ij} \vec{\mathbf{a}}^i \otimes \vec{\mathbf{a}}^j = \epsilon_{kl} \vec{\mathbf{e}}^k \otimes \vec{\mathbf{e}}^l = \epsilon_{kl} \vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{e}}_l \quad (\text{II.32})$$

On introduit la base duale pour simplifier les écritures :

$$[\epsilon] \vec{\mathbf{a}}_i \otimes \vec{\mathbf{a}}_j = \epsilon_{ij} (\vec{\mathbf{a}}^i \otimes \vec{\mathbf{a}}^j)(\vec{\mathbf{a}}_i \otimes \vec{\mathbf{a}}_j) = \epsilon_{ij} \quad (\text{II.33})$$

On peut donc exprimer les composantes du tenseur des déformations dans la base locale  $\epsilon_{ij}$  en fonction des composantes de la base de référence  $\epsilon_{kl}$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{kl} (\vec{\mathbf{e}}^k \otimes \vec{\mathbf{e}}^l)(\vec{\mathbf{a}}_i \otimes \vec{\mathbf{a}}_j) \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_{kl} (\vec{\mathbf{e}}_k \cdot \vec{\mathbf{a}}_i)(\vec{\mathbf{e}}_l \cdot \vec{\mathbf{a}}_j) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

La matrice de changement  $[\mathbf{T}_d]$  (équation II.40) de taille 6x6 permettant le transport de vecteur  $\{\epsilon\}$  entre la base de référence et la base locale s'exprime donc en fonction des coordonnées des axes anisotropies dans la base euclidienne  $\langle \{\mathbf{e}_i\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  avec l'équation II.34. On obtient donc le changement de base suivant :

$$\{\epsilon\}_{mat} = [\mathbf{T}_d] \{\epsilon\}_{ref} \quad (\text{II.35})$$

On suit le même raisonnement pour le déviateur des contraintes qui doit être transporté de la base locale à la base de référence. On peut donc écrire :

$$[\mathbf{S}] = S^{ij} \vec{\mathbf{a}}_i \otimes \vec{\mathbf{a}}_j = S^{kl} \vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{e}}_l = S^{kl} \vec{\mathbf{e}}^k \otimes \vec{\mathbf{e}}^l \quad (\text{II.36})$$

On introduit la base référence pour déterminer les composantes du déviateur dans la base de référence  $\epsilon_{kl}$  :

$$[\mathbf{S}] \vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{e}}_l = S_{ij} (\vec{\mathbf{a}}^i \otimes \vec{\mathbf{a}}^j)(\vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{e}}_l) = S_{kl} \quad (\text{II.37})$$

D'où l'expression suivante permettant de déterminer la matrice de transport pour les contraintes :

$$S_{kl} = S_{ij} (\vec{\mathbf{e}}_k \cdot \vec{\mathbf{a}}_i)(\vec{\mathbf{e}}_l \cdot \vec{\mathbf{a}}_j)$$



La matrice de changement de base  $[\mathbf{T}_c]$  (équation II.41) permet donc d'effectuer le transport des contraintes suivant :

$$\{\mathbf{S}\}_{ref} = [\mathbf{T}_c] \{\mathbf{S}\}_{mat} \quad (\text{II.39})$$

La définition des deux changements de base entre un repère euclidien et un repère non orthogonal nécessite de connaître les propriétés des tenseurs concernés, et notamment la variance et la base associée à chaque tenseur. Les transports nécessaires à l'établissement de la formulation anisotrope  $[\mathbf{T}_c]$  et  $[\mathbf{T}_d]$  ont été établis dans le cadre des notations de Voigt.

$$[\mathbf{T}_d]_{ref \rightarrow mat} = \begin{bmatrix} a_1(x)^2 & a_1(y)^2 & a_1(z)^2 & 2a_1(x)a_1(y) & 2a_1(y)a_1(z) & 2a_1(x)a_1(z) \\ a_2(x)^2 & a_2(y)^2 & a_2(z)^2 & 2a_2(x)a_2(y) & 2a_2(y)a_2(z) & 2a_2(x)a_2(z) \\ a_3(x)^2 & a_3(y)^2 & a_3(z)^2 & 2a_3(x)a_3(y) & 2a_3(y)a_3(z) & 2a_3(x)a_3(z) \\ a_1(x)a_2(x) & a_1(y)a_2(y) & a_1(z)a_2(z) & a_1(x)a_2(y) + a_1(y)a_2(x) & a_1(y)a_2(z) + a_1(z)a_2(y) & a_1(x)a_2(z) + a_1(z)a_2(x) \\ a_2(x)a_3(x) & a_2(y)a_3(y) & a_2(z)a_3(z) & a_2(x)a_3(y) + a_2(y)a_3(x) & a_2(y)a_3(z) + a_2(z)a_3(y) & a_2(x)a_3(z) + a_2(z)a_3(x) \\ a_1(x)a_3(x) & a_1(y)a_3(y) & a_1(z)a_3(z) & a_1(x)a_3(y) + a_1(y)a_3(x) & a_1(y)a_3(z) + a_1(z)a_3(y) & a_1(x)a_3(z) + a_1(z)a_3(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Matrice de changement de base pour les déformations

$$[\mathbf{T}_c]_{mat \rightarrow ref} = \begin{bmatrix} a_1(x)^2 & a_2(x)^2 & a_3(x)^2 & 2a_1(x)a_2(x) & 2a_2(x)a_3(x) & 2a_1(x)a_3(x) \\ a_1(y)^2 & a_2(y)^2 & a_3(y)^2 & 2a_1(y)a_2(y) & 2a_2(y)a_3(y) & 2a_1(y)a_3(y) \\ a_1(z)^2 & a_2(z)^2 & a_3(z)^2 & 2a_1(z)a_2(z) & 2a_2(z)a_3(z) & 2a_1(z)a_3(z) \\ a_1(x)a_1(y) & a_2(x)a_2(y) & a_3(x)a_3(y) & a_1(x)a_2(y) + a_1(y)a_2(x) & a_2(x)a_3(y) + a_1(y)a_3(x) & a_1(x)a_3(y) + a_1(y)a_3(x) \\ a_1(y)a_1(z) & a_2(y)a_2(z) & a_3(y)a_3(z) & a_1(y)a_2(z) + a_1(z)a_2(y) & a_2(y)a_3(z) + a_2(z)a_3(y) & a_1(y)a_3(z) + a_1(z)a_3(y) \\ a_1(x)a_1(z) & a_2(x)a_2(z) & a_3(x)a_3(z) & a_1(x)a_2(z) + a_1(z)a_2(x) & a_2(x)a_3(z) + a_2(z)a_3(x) & a_1(x)a_3(z) + a_1(z)a_3(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Matrice de changement de base pour les contraintes

## II.3 Spécificité de la formulation anisotrope

L'utilisation d'une formulation anisotrope, basée sur la réactualisation des axes par le gradient de la transformation, implique la vérification de certains principes afin de valider la modélisation d'un point de vue physique. On se penchera donc sur l'objectivité de la formulation et la transition entre deux incréments pour effectuer les meilleurs choix lors de l'implémentation du modèle dans un logiciel de calcul par la suite.

### II.3.1 L'objectivité de la formulation

L'objectivité est la propriété fondamentale, qui exprime l'invariance des tenseurs par rapport à certaines transformations. Dans notre cas, on se limitera à des mouvement de corps rigide, et notamment des rotations rigides. Ce principe impose l'indépendance des grandeurs tensorielles, par rapport à l'observateur qui les évalue. On peut citer, par exemple, le tenseur des déformations, qui ne serait être nul pour un observateur, et non nul pour un autre. Par contre les notions de vitesse, d'accélération d'une particule sont liées à un référentiel, et ces variables ne sont pas objectives. En effet, ces variables sont dépendantes de l'observateur et leur valeur varie suivant le référentiel. L'invariance par rapport à une rotation rigide est le paramètre qui permet de déterminer l'objectivité des grandeurs tensorielles. On peut citer comme tenseur objectif le tenseur des contraintes de Cauchy  $[\boldsymbol{\sigma}]$ , le tenseur des taux de déformation  $[\mathbf{D}]$ . Par contre, tout ce qui a attrait à la notion de vitesse, tel le gradient des vitesses  $[\mathbf{L}]$ , ou le vecteur vitesse  $\vec{v}$  n'est pas objectif, car la dépendance au référentiel observateur est prépondérante.

Les lois de comportements sont exprimées dans un repère mobile, réactualisé par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , tandis que les équations d'équilibre sont résolues dans le repère de référence. Pour pouvoir établir l'équilibre du milieu continu discrétisé, toutes les contraintes doivent être exprimées dans le même repère et non dans des bases différentes d'un éléments finis à l'autre. Les calculs élasto-plastiques doivent donc intégrer l'orientation des axes d'anisotropie. Deux possibilités existent (Fig. II.10) :

1. Transporter les grandeurs tensorielles dans le repère matériau pour calculer les incréments de contraintes et ensuite revenir dans (Méthode 1) le repère référence.
2. Transporter les lois de comportement dans un repère de référence et effectuer les calculs dans ce repère. (Méthode 2)

Nous allons essayer d'évaluer la pertinence de méthodes sur un test de cisaillement simple.

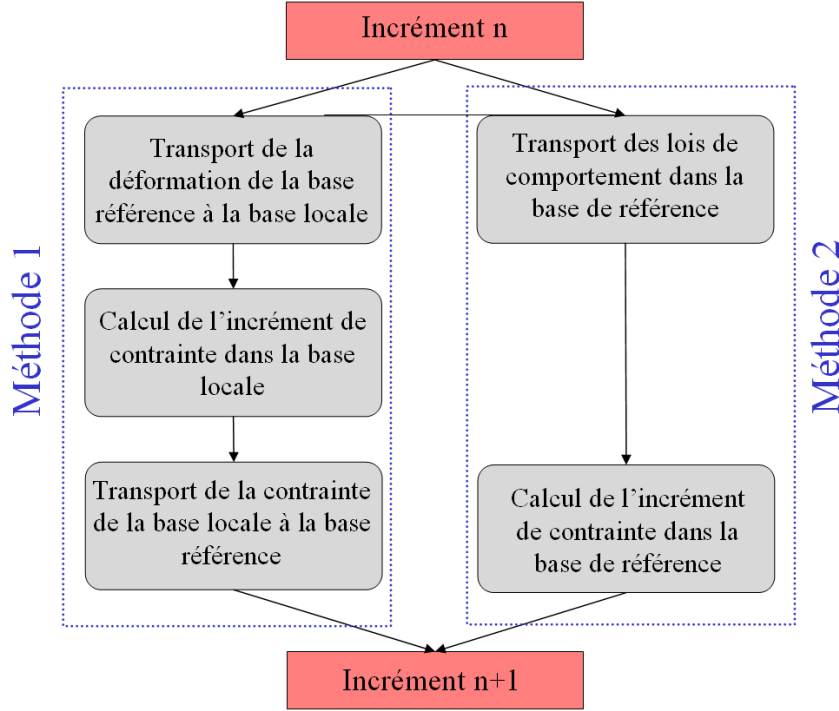


FIGURE II.10 – Possibilités de calcul de l'incrément de contrainte en tenant compte de la formulation anisotrope

Afin de simplifier les calculs, on considèrera uniquement un comportement élastique anisotrope en contraintes planes. Cette loi de comportement permettra de vérifier grâce à des calculs analytiques, l'objectivité de la formulation. On considère donc un comportement élastique anisotrope, défini par la matrice  $[C_a]$  telle que :

$$[\dot{\mathbf{S}}]_{mat} = [C_a] [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]_{mat}, \quad [C_a] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Le test analytique du cisaillement simple va permettre de faire un choix parmi ces deux possibilités en comparant les résultats analytiques à ceux obtenus avec Abaqus<sup>®</sup> où deux routines utilisateurs "Vumat" représentant les deux choix possibles ont été implémentées. Le logiciel permet de travailler sur un seul élément quadrangle pour se rapprocher au maximum du cas analytique. Le repère de référence du logiciel Abaqus<sup>®</sup> est le repère de Green-Naghdi, réactualisé par la rotation moyenne  $[\mathbf{R}]$ .

Les calculs analytiques sont détaillées dans l'annexe A, seules les courbes seront présentées dans cette partie. On considère un comportement élastique anisotrope simple, tel que  $C_{11} = 6 \cdot 10^6$  Mpa,  $C_{22} = 3 \cdot 10^6$  Mpa et  $C_{12} = 0.8 \cdot 10^6$  Mpa. Les autres termes de la matrice  $C_a$  sont considérés comme nuls. Le modèle 1 consiste à transporter les grandeurs

tensorielles du repère de référence au repère matériau. On applique ensuite directement la loi de comportement élastique anisotrope avec les composantes embarquées (équation II.42) pour déterminer l'incrément de contrainte dans la base locale. Les contraintes calculées seront de nouveau transportées dans le repère de référence pour la résolution des équations d'équilibre. Dans le second modèle, la loi de comportement est transportée de la base locale à la base de référence où tous les calculs seront effectués. A chaque instant de la transformation, on applique donc la relation suivante (équation II.35 et II.39) :

$$[\dot{\mathbf{S}}]_{ref} = [\mathbf{T}_c] [\mathbf{C}_a] [\mathbf{T}d] [\dot{\epsilon}]_{ref} \quad (\text{II.43})$$

La figure II.11 représente l'évolution des contraintes en fonction du paramètre de cisaillement  $\gamma$  pour une orientation initiale des axes d'anisotropie à  $0/90^\circ$ . On observe donc des différences entre les calculs analytiques et les résultats numériques issus du modèle 2, dans lequel la loi de comportement est transportée dans le repère de référence. En revanche le modèle transportant les grandeurs tensorielles dans le repère local et calculant l'incrément de contrainte dans ce repère donne exactement les mêmes résultats que le calcul analytique. Les mêmes tests ont été développés pour une orientation initiale des axes d'anisotropie à  $45/135^\circ$  (Fig. II.12). Les calculs analytiques sont aussi explicités dans l'annexe A par souci de lisibilité. On retrouve les mêmes conclusions que pour l'exemple précédent, à savoir une bonne corrélation entre analytique et numérique pour le modèle 1, et une erreur importante avec le second modèle.

La même analyse a été effectuée pour les tests de traction biaxiale suivi d'une rotation rigide, et de cisaillement pur. Les résultats ne sont pas présentés dans ce manuscrit, car il n'apporte aucune information permettant de choisir une formulation, donnant exactement les mêmes résultats. Seul l'introduction d'une rotation rigide  $[\mathbf{R}]$  permet de différencier les deux méthodes. La comparaison des courbes analytiques et numériques permet de discriminer la méthode 2. On peut donc en conclure que lorsque les axes d'anisotropie ne sont plus orthogonaux, ce qui est le cas lorsqu'ils sont réactualisés par  $[\mathbf{F}]$ , une attention particulière doit être portée à la construction du modèle. A la vue des résultats issus du test de cisaillement simple, la formulation reste objective uniquement si on transporte les grandeurs tensorielles, et non la loi de comportement. Dans l'implémentation du modèle, le repère de travail pour le calcul de l'incrément de contrainte sera donc le repère local. Les grandeurs seront transportées, pour les déformations de la base de référence à la base locale, et inversement pour les contraintes.

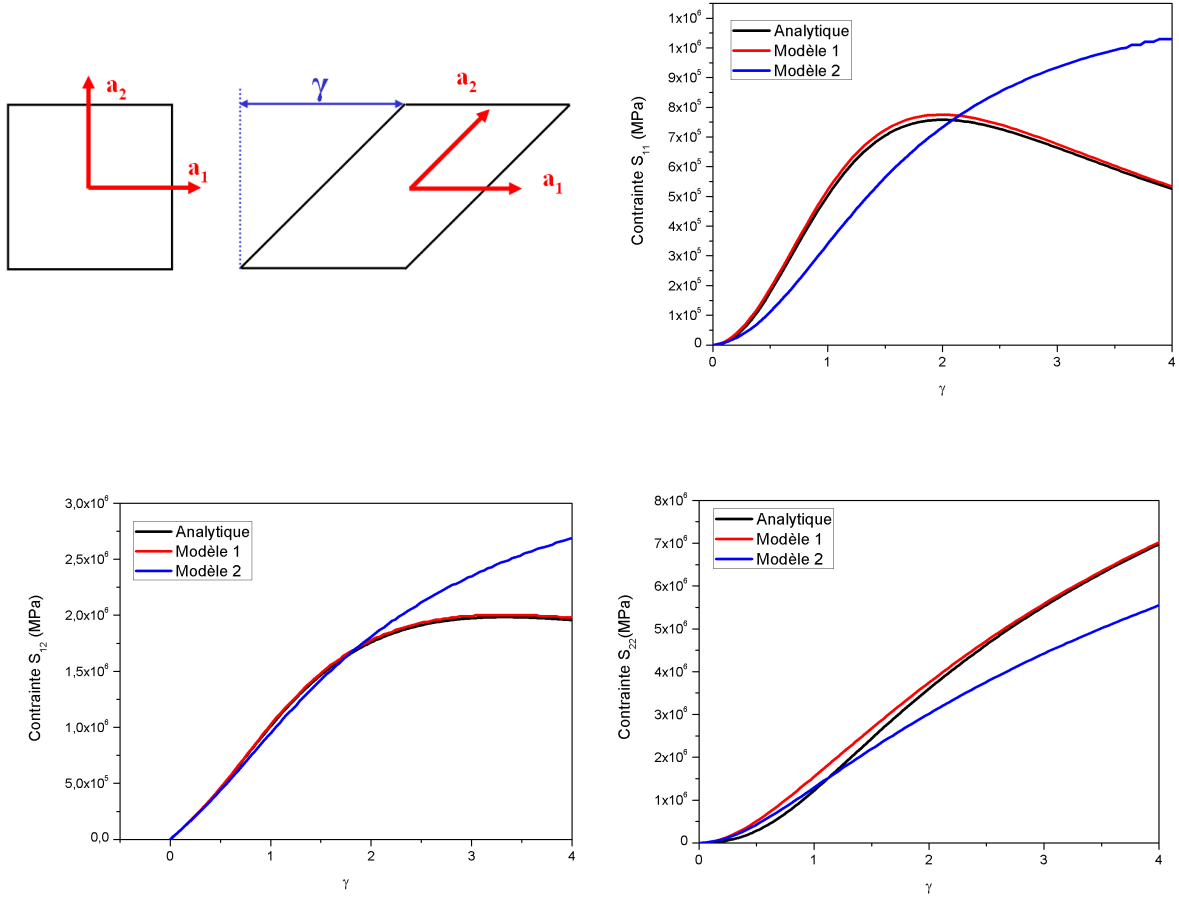


FIGURE II.11 – Evolution des contraintes, exprimées dans le repère de Green-Naghdi en fonction du cisaillement  $\gamma$  pour une orientation initiale à  $0/90^\circ$

### II.3.2 La gestion incrémentale de la formulation

La formulation anisotrope va être implémentée dans un logiciel de calcul, qui résout incrémentalement le problème mécanique. L'implémentation va être traitée dans le chapitre III. Cependant, d'un point de vue cinématique, une réflexion doit être menée concernant la cinématique de la formulation entre deux incréments consécutifs. On calcule le déviateur des contraintes à l'incrément  $n+1$  à partir de celui à l'incrément  $n$  :

$$[\mathbf{S}]_{n+1} = [\mathbf{S}]_n + [\Delta \mathbf{S}]_{n+1} \quad (\text{II.44})$$

Les axes d'anisotropie sont réactualisés entre deux incréments par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  (équation II.25). Une réflexion doit être menée sur la définition des contraintes  $[\mathbf{S}]_n$ . En effet, à l'incrément 'n', elles sont exprimées dans le repère

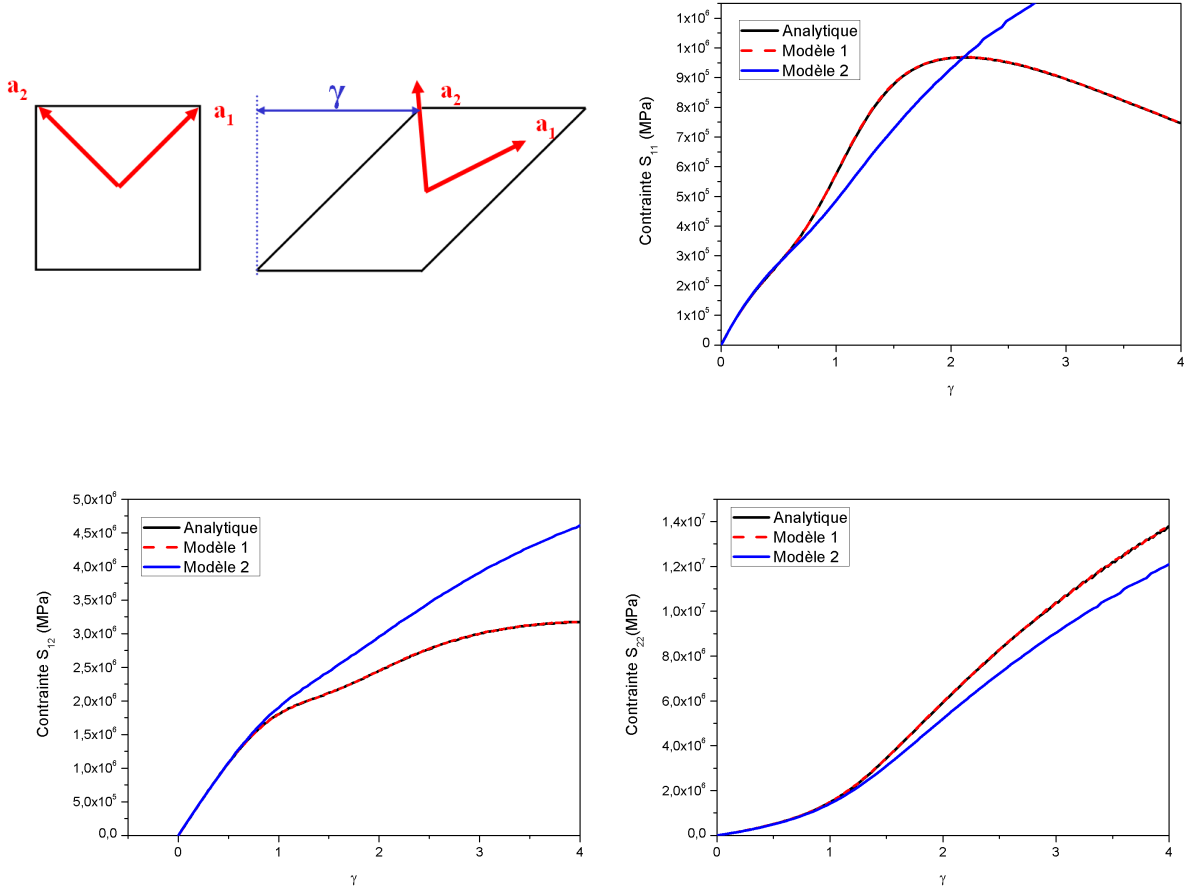


FIGURE II.12 – Evolution des contraintes, exprimées dans le repère de Green-Naghdi en fonction du cisaillement  $\gamma$  pour une orientation initiale à 45/135 °

$\langle \{\mathbf{a}_i^n\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  et à l'incrément 'n+1' dans le repère  $\langle \{\mathbf{a}_i^{n+1}\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ . La configuration des différents repères est schématisée à la figure II.13. Différentes possibilités existent pour assurer la transition des contraintes entre les incréments (Fig. II.13).

La conservation de la physique entre la fin de l'incrément n et le début de l'incrément n+1 permettra de juger de la qualité de la formulation. Si l'incrément de contrainte à l'incrément n+1 est nul, la contrainte équivalente  $f([\mathbf{S}])$  devra être la même qu'à l'instant précédent :

$$[\mathbf{S}]_{n+1}^0 = [\mathbf{S}]_n \implies f([\mathbf{S}]_{n+1}^0) = f([\mathbf{S}]_n) \quad (\text{II.45})$$

**i) Utilisation de la base euclidienne de référence** La première solution consiste à utiliser la base euclidienne de référence, car elle est fixe durant toute la transformation.

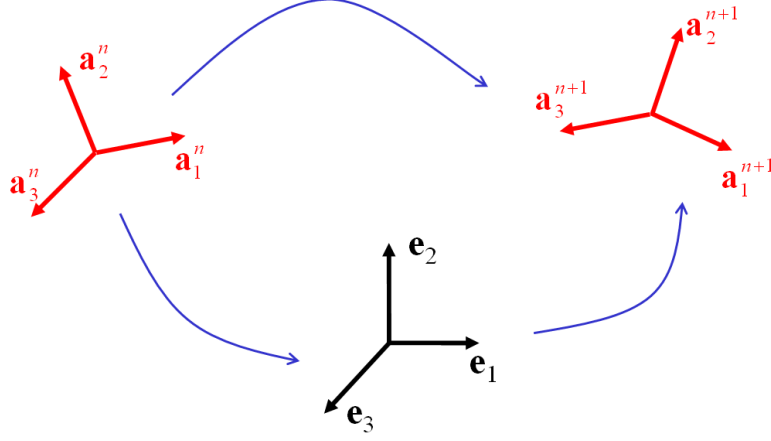


FIGURE II.13 – Configuration des repères lors de la transition entre deux incréments

Entre deux incréments, le déviateur des contraintes doit donc être transporté dans le repère de référence puis dans le nouveau repère local  ${}_{v}eca_i^{n+1}$ . On suppose que l'état de contrainte à la fin de l'incrément  $n$  est  $[S]_n$  dans le repère  $\langle \{a_i^n\}, i = 1, 2, 3 \rangle$ . La figure II.14 indique le cheminement suivi par les contraintes pour obtenir leur nouvelle valeur dans le repère des axes d'anisotropie actualisé. On note respectivement  $[M]_n$  et  $[M]_{n+1}$ , les matrices de changement de base permettant le transport entre la base de référence et les bases des axes d'anisotropie à l'incrément  $n$  et à l'incrément  $n+1$ .

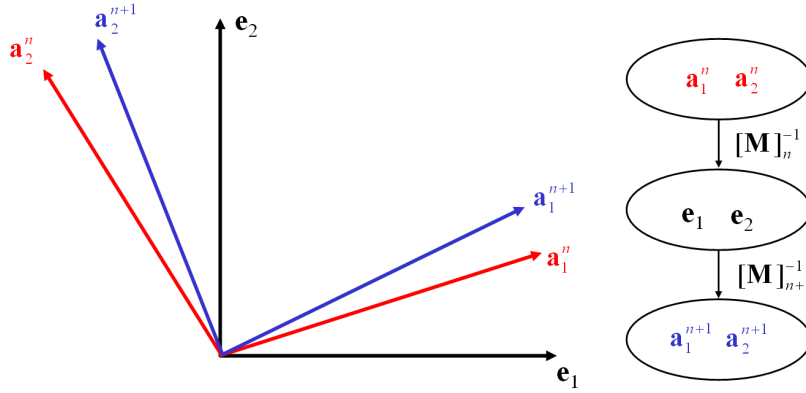


FIGURE II.14 – Actualisation des contraintes en utilisant la base de référence

En utilisant les formules de changement de base pour les contraintes (équation II.39), on peut exprimer les nouvelles contraintes dans la base locale réactualisée  $\langle \{a_i^{n+1}\}, i = 1, 2, 3 \rangle$  :

$$[S]_{n+1}^0 = [M]_{n+1}^{-1} [M]_n [S]_n [M]_n^T [M]_{n+1}^{-T} \implies f([S]_{n+1}) \neq f([S]_n) \quad (\text{II.46})$$

En appliquant cette méthode pour le transport des contraintes entre deux incréments de calcul, l'état de plasticité dans le matériau est différent, à cause de l'utilisation de



la base de référence euclidienne pour stocker le déviateur de contrainte. Le passage par cette base introduit de la plasticité non physique dans la formulation anisotrope. Il faut donc trouver une autre solution pour gérer le déviateur des contraintes entre deux incréments.

**ii) Les contraintes appartiennent au repère local** La deuxième hypothèse est de considérer que le déviateur des contraintes dans le repère local tourne avec celui-ci sans modification de sa valeur. Pour ce faire, on considère que la relation suivante est vraie entre deux incréments  $n$  et  $n+1$  :

$$S_{n+1}^{ij} = S_n^{ij} \quad (\text{II.47})$$

En utilisant cette hypothèse, l'état de plasticité est bien conservé d'un incrément à l'autre et aucun ajout de phénomène non physique n'est apparu. Par contre celle-ci implique le stockage du déviateur des contraintes dans la base local entre chaque incrément.

La conservation des grandeurs physiques lors des différents transports est un principe fondamental à respecter. La gestion des contraintes lors du passage entre deux incréments consécutifs implique de faire des hypothèses. Dans notre formulation anisotrope, on a privilégié la conservation de la contrainte équivalente, et ainsi on considérera que les composantes des contraintes dans le repère local sont attachées aux axes de celui-ci.

## II.4 Conclusion du chapitre

Une fois le modèle mécanique permettant la modélisation du comportement plastique des alliages de titane défini, la formulation continue anisotrope doit être décrite d'un point de vue cinématique. L'anisotropie plastique impose un comportement dépendant d'une orientation, et cette dernière évolue lors de la transformation que subit la pièce. On suppose que toutes les lois de comportement sont définies dans le repère des axes d'anisotropie. La théorie de la mécanique des grandes transformations permet d'émettre des hypothèses pour obtenir une formulation la plus correcte possible. L'environnement de la modélisation est donc composé de deux bases distinctes, une base euclidienne de référence fixe et une base matérielle attachée aux directions principales d'anisotropie. Les axes d'anisotropie contenus dans le plan de la tôle sont donc réactualisés par le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , ce qui leur permet de suivre la déformation et les mouvements de corps rigide. Ces deux axes restent donc toujours dans le plan de la tôle. La formulation étant développée pour les produits plats, on impose que le troisième axe soit toujours orienté suivant la normale à la tôle. Cette hypothèse permettra d'obtenir par la suite des informations sur l'épaisseur de la tôle. Le test de cisaillement simple permet de valider notre choix concernant la grandeur actualisant les axes d'anisotropie. En contrepartie, ce choix implique de travailler avec un repère local non orthogonal, ce qui nécessite une réflexion pour toutes les opérations de transport, et la prise en compte de la notion de variance pour les tenseurs des contraintes et des déformations. A partir des calculs tensoriels, deux changements de base sont établis, le premier  $[\mathbf{T}_d]$  pour transporter les déformations de la base de référence à la base locale, et le second  $[\mathbf{T}_c]$  pour le transport inverse des contraintes.

La formulation du milieu continu anisotrope se doit d'être objective, afin qu'un mouvement de corps rigide ne modifie pas l'état de contrainte du matériau. Des comparaisons entre les résultats analytiques et numériques sur le test du cisaillement simple ont permis de déterminer la marche à suivre pour obtenir un modèle objectif. Les grandeurs tensorielles doivent être transportées dans la base locale, et tous les calculs d'incrément de contrainte doivent être effectués dans cette même base. Le test du cisaillement simple a été utilisé pour établir la formulation, car il s'agit d'une sollicitation simple, admettant une rotation moyenne  $[\mathbf{R}]$  non nulle. Il permet donc d'entrevoir tous les problèmes liés à un mouvement de corps rigide, afin de les prendre en compte dans le modèle. Et enfin, la gestion du transport des contraintes entre deux incréments est un point important de la formulation. Afin de respecter la conservation des grandeurs physiques entre deux incréments consécutifs, on considère que les composantes du tenseur des contraintes sont liées aux axes du repère local, et donc aucun transport ne doit être appliqué entre deux incréments consécutifs. En respectant cette hypothèse, aucun

ajout de plasticité non physique n'apparaît lors de la transition entre deux incréments.

Ce chapitre a permis la définition de la formulation anisotrope permettant la simulation de la mise en forme d'alliage de titane. Le prochain chapitre est consacré à l'implémentation de la formulation et du modèle mécanique dans un logiciel d'élément finis.

# Chapitre III

## Implémentation numérique de la formulation anisotrope

La formulation anisotrope définie mécaniquement dans le chapitre I et cinématiquement dans le chapitre II est implémentée dans le logiciel d'éléments finis Forge<sup>®</sup>. Le comportement mécanique des alliages de titane peut être modélisé par un critère de plasticité anisotrope, des lois d'écrouissage isotrope et cinématique. La surface de plasticité sera définie soit par un critère quadratique de Hill 1948 (équation [I.9](#)) ; soit par un critère non quadratique de Cazacu 2006 (équation [I.34](#)). Concernant l'écrouissage cinématique  $[\mathbf{X}]$ , une loi de Armstrong-Frederick semble la plus appropriée pour la simulation du formage d'alliage de titane. Et enfin, plusieurs lois d'écrouissage isotrope seront utilisées afin de comparer leur précision.

L'implémentation d'un modèle dans un logiciel de calcul est spécifique à celui-ci, car fortement dépendante de la formulation et des éléments finis utilisés. La suite logistiqu Forge<sup>®</sup> est le logiciel support du modèle anisotrope. Dans un premier temps, le problème mécanique et sa résolution par éléments finis seront présentés, ainsi que les grandeurs nécessaires à l'implémentation d'un nouveau comportement matériau. Pour l'instant, seuls les comportements isotropes peuvent être simulés avec ce logiciel. Afin de permettre la prise en compte de l'anisotropie, le critère de Hill et le critère de Cazacu seront implémentés par l'intermédiaire de l'algorithme du retour radial. Des cas tests de simulation de mise en forme permettent de valider la formulation anisotrope choisie et son intégration dans le logiciel de calcul.

### III.1 La résolution du problème mécanique dans Forge<sup>®</sup>

Forge<sup>®</sup> est un logiciel éléments finis de simulation des écoulements de matière au cours de la mise en forme. L'équilibre du corps déformable est régi à chaque instant par les équations de conservation. Le premier principe est de conservation de la quantité de mouvement qui impose :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho(\vec{w} - \vec{\gamma}) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Dans cette expression,  $\vec{w}$  désigne les efforts volumiques dus à la gravité,  $\vec{\gamma}$  le vecteur accélération et  $\rho$  la masse volumique. On supposera ces deux termes négligeables devant les efforts internes pour les procédés de mise en forme. Le second principe de conservation est la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{III.2})$$

Dans le cas d'un matériau incompressible, la masse volumique  $\rho$  est constante, ce qui amène à :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 = \text{tra}([\dot{\epsilon}]) \quad (\text{III.3})$$

L'utilisation de la décomposition élasto-plastique permet d'écrire :

$$[\dot{\epsilon}] = [\dot{\epsilon}]^e + [\dot{\epsilon}]^p \quad (\text{III.4})$$

En intégrant l'incompressibilité plastique ( $\text{tra}([\dot{\epsilon}]^p) = 0$ ) et la compressibilité élastique du matériau caractérisée par le coefficient  $\chi$ , on peut écrire en tenant de compte de la pression hydrostatique  $p$  :

$$\text{tra}([\dot{\epsilon}]) = -\frac{\dot{p}}{\chi} \quad (\text{III.5})$$

Le principe de conservation de mouvement et de masse permet l'écriture d'un système, résolu implicitement par Forge<sup>®</sup> :

$$\begin{cases} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \\ \text{tra}(\dot{\epsilon}) + \frac{\dot{p}}{\chi} &= 0 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Les équations du système III.6 peuvent s'exprimer en fonction des deux inconnues du problème : la vitesse  $\vec{v}$  et la pression  $p$ .

$$\begin{cases} \text{div}(\mathbf{S}(\vec{v})) - \nabla p &= 0 \\ \text{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v})) + \frac{\dot{p}}{\chi} &= 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Il s'agit donc d'une formulation mixte en vitesse-pressure. Le problème fort est transformé en une formulation faible par la multiplication par des fonctions admissibles  $\vec{v}^*$  et  $p^*$ . La résolution du problème mécanique peut se résumer par la recherche des fonctions  $\vec{v}^*$  et  $p^*$ , appartenant respectivement aux espaces  $V$  et  $P$  des fonctions admissibles vérifiant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} [\mathbf{S}(\vec{v})] : [\dot{\epsilon}(\vec{v}^*)] d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v}^*)) d\Omega - \int_{d\Omega} \mathbf{T} \cdot \vec{v}^* = 0 \quad \forall \vec{v}^* \in V \\ \int_{\Omega} p^* \left[ \operatorname{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v})) + \frac{\dot{p}}{\chi} \right] d\Omega = 0 \quad \forall p^* \in P \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Le chargement des conditions aux limites du domaine  $\Omega$  est introduit par  $\mathbf{T}$ . La discrétisation en éléments finis consiste en la division du domaine  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega_e$ . La résolution du problème discrétisé implique la recherche des fonctions  $\vec{v}_e$  et  $p_e$ , appartenant aux domaines des solutions admissibles  $V_e$  et  $P_e$ , pour chaque élément. Les équations précédentes (système III.8) peuvent être réécrites :

$$\begin{cases} \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} [\mathbf{S}(\vec{v}_e)] : [\dot{\epsilon}(\vec{v}_e^*)] d\Omega_e - \int_{\Omega_e} p_e \operatorname{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v}_e^*)) d\Omega_e - \int_{d\Omega_e} \mathbf{T} \cdot \vec{v}_e^* = 0 \quad \forall \vec{v}_e^* \in V_e \\ \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} p_e^* \left[ \operatorname{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v})) + \frac{\dot{p}_e}{\chi} \right] d\Omega_e = 0 \quad \forall p_e^* \in P_e \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Des fonctions simples, définies sur  $\Omega_e$ , permettent de générer les solutions  $\vec{v}_e$  et  $p_e$ . L'élément fini utilisé dans Forge<sup>®</sup> est un tétraèdre avec un noeud à chaque sommet comprenant une interpolation linéaire en vitesse et en pression. Pour éviter les problèmes de blocage, l'interpolation du champ de vitesse est enrichie par un champ de vitesse bulle, ainsi qu'un noeud additionnel pour la vitesse au centre de l'élément. Le champ bulle est linéaire dans chaque tétraèdre, formé par le noeud au centre et trois noeuds appartenant aux sommets de l'élément fini. L'élément utilisé est décrit par la figure III.1 [Fayolle08].

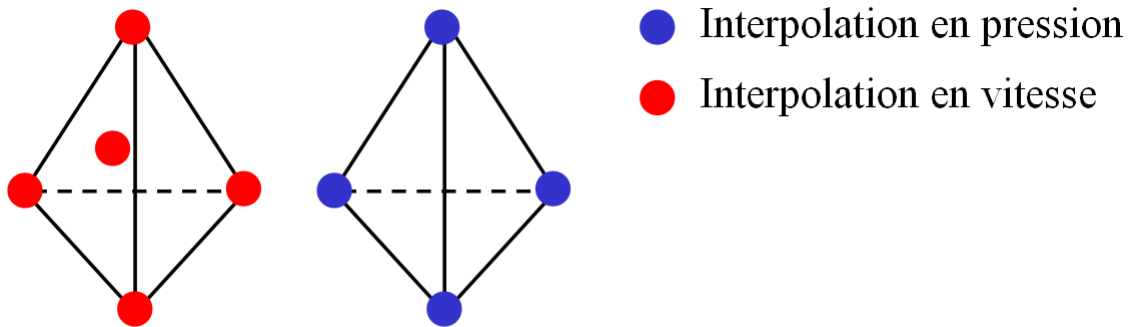


FIGURE III.1 – Mini-élément P1+/P1 utilisé dans Forge

Le champ de vitesse peut être donc décomposer en deux termes, un terme linéaire et un terme bulle [Coupez] :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_e^l + \vec{b}_e \quad (\text{III.10})$$

La vitesse et la pression en un point  $\mathbf{x}$  d'un élément s'écrivent à l'aide des fonctions de forme  $N_k$  et  $B$  respectivement pour la partie linéaire et la partie bulle :

$$\begin{aligned} v_e^i &= N_k(\mathbf{x})v_k^i + B(\mathbf{x})b^i \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad i = 1..3 \\ p_e^i &= N_k(\mathbf{x})p_k^i \quad k = 1..4 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Le déviateur des contraintes peut être décomposé en deux composantes, une composante linéaire et une bulle. On obtient alors :

$$\int_{\Omega_e} [\mathbf{S}(\vec{v}_e)] : [\dot{\epsilon}(\vec{v}_{*e})] d\Omega_e = \int_{\Omega_e} ([\mathbf{S}^l] + [\mathbf{S}^b]) : [\dot{\epsilon}(\vec{v}_{*e})] d\Omega_e \quad (\text{III.12})$$

L'intégration du champ de vitesse bulle dans le système d'équation III.13 mène à la résolution du problème mécanique final dans l'espace discrétisé  $\Omega_e$  en fonction des inconnues  $\vec{v}^{l*}$ ,  $\vec{b}^*$  et  $p^*$  [Knockaert01] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\Omega_e} \left( \int_{\Omega_e} [\mathbf{S}^l] : [\dot{\epsilon}(\vec{v}^{l*})] d\Omega_e - \int_{\Omega_e} p_e \text{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v}^{l*})) d\Omega_e - \int_{d\Omega_e} \mathbf{T} \cdot \vec{v}^{l*} \right) = 0 \quad \forall \vec{v}^{l*} \in V_e^l \\ \sum_{\Omega_e} \left( \int_{\Omega_e} [\mathbf{S}^l] : [\dot{\epsilon}(\vec{b}^*)] d\Omega_e - \int_{\Omega_e} p_e \text{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{b}^*)) d\Omega_e - \int_{d\Omega_e} \mathbf{T} \cdot \vec{b}^* \right) = 0 \quad \forall \vec{b}^* \in V_e^b \\ \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} p^* \left[ \text{tra}(\dot{\epsilon}(\vec{v}^{l*} + \vec{b}^*)) + \frac{\dot{p}_e}{\chi} \right] d\Omega_e = 0 \quad \forall p_e^* \in P_e \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$

Ce système permet de découpler les termes linéaires  $\vec{v}^{l*}$  et les termes bulles  $\vec{b}^*$  de la vitesse. Il est résolu par une méthode de Newton-Raphson, avec pour inconnues les incréments de la vitesse linéaire, de la vitesse bulle et de la pression, respectivement  $\Delta\vec{v}$ ,  $\Delta\vec{b}$  et  $\Delta p$ . Le système III.13 se met alors sous la forme de :

$$\begin{bmatrix} K_e^{vv} & 0 & K_e^{vp} \\ 0 & K_e^{bb} & K_e^{bp} \\ K_e^{vpT} & K_e^{bpT} & K_e^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\vec{v} \\ \Delta\vec{b} \\ \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_e^l \\ R_e^b \\ R_e^p \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

La contribution de la partie bulle de la vitesse peut être exprimée en fonction des termes de l'équation III.15 par la méthode de la condensation de la bulle. Le système final peut donc se décrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} K_e^{vv} & K_e^{vp} \\ K_e^{vpT} & \bar{K}_e^{bp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\vec{v} \\ \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_e^l \\ \bar{R}_e^p \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Les termes  $\bar{K}_e^{bp}$  et  $\bar{R}_e^p$  s'exprime en fonction des composantes du système d'équations III.15 :

$$\bar{K}_e^{bp} = K_e^{pp} - \left(K_e^{bp}\right)^T \left(K_e^{bp}\right)^{-1} K_e^{bp} \quad (\text{III.16})$$

$$\bar{R}_e^p = R_e^p - \left(K_e^{bp}\right)^T \left(K_e^{bp}\right)^{-1} R_e^b \quad (\text{III.17})$$

La résolution implicite de ce système nécessite le calcul de deux modules tangents : le module tangent linéaire  $[\mathbf{B}^l]$  et le module tangent bulle  $[\mathbf{B}^b]$  [Fayolle08] :

$$[\mathbf{B}^l] = \frac{\partial \mathbf{S}^l}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}(\vec{v}_e^l)} \quad (\text{III.18})$$

$$[\mathbf{B}^b] = \frac{\partial \mathbf{S}^b}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}(\vec{b}_e)} \quad (\text{III.19})$$

La résolution discrète du problème mécanique implique donc le calcul de modules tangents, dépendants des lois de comportements choisies. Les expressions de celles-ci seront exprimées dans la section concernant l'intégration d'un nouveau comportement dans un logiciel de calcul.

## III.2 Implémentation d'un modèle de comportement mécanique

Dans cette section, les outils nécessaires à l'intégration d'une formulation anisotrope dans un logiciel élément finis, et plus particulièrement dans Forge<sup>®</sup>, vont être décrits. Après avoir décrit l'environnement du logiciel et établi les relations de base de la plasticité, l'algorithme du retour radial permettra de calculer les incréments de contraintes et les modules tangents linéaire et bulle seront explicités dans le cas général.

### III.2.1 Mise en place de la formulation incrémentale

Les calculs mécaniques sont effectués de manière incrémentale. Les notations 'n' et 'n+1' indiquent respectivement la valeur de la grandeur à la fin de l'incrément n et n+1. Cette convention sera utilisée pour le reste du manuscrit.



### III.2.1.a Une formulation lagrangienne réactualisée

Le logiciel Forge<sup>®</sup> utilise une formulation lagrangienne réactualisée. Lors du calcul d'une nouvelle configuration de la transformation à l'incrément  $n+1$ , la configuration de référence est celle de l'incrément  $n$ . Ainsi toutes les grandeurs calculées doivent s'exprimer en fonction de leur valeur à l'incrément précédent. La configuration  $\vec{X}$  est actualisée par la vitesse  $\vec{V}$  durant l'incrément (Fig.III.2) :

$$\vec{X}(t + \Delta t) = \vec{X}(t) + \Delta t \vec{V}(t) \quad (\text{III.20})$$

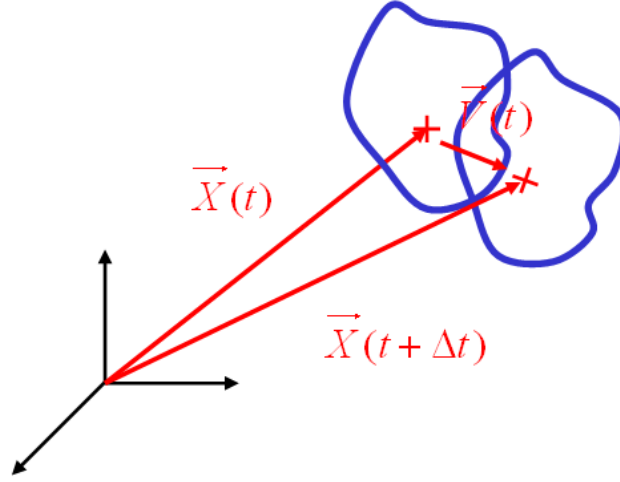


FIGURE III.2 – Formulation lagrangienne réactualisée

Il faudra donc considérer la configuration au début de l'incrément comme configuration de référence. Elle sera la base pour le calcul des grandeurs tensorielles utiles à la détermination de la configuration à la fin de celui-ci.

### III.2.1.b La réactualisation des axes d'anisotropie

Après avoir étudié la cinématique des directions d'anisotropie au cours de la transformation dans la section II, un choix concernant l'intégration numérique doit être effectué. Les axes d'anisotropie peuvent être réactualisés avec le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  au début de l'incrément, à la fin de celui-ci ou en utilisant une valeur intermédiaire (Fig.III.3)

Le choix de la configuration pour la réactualisation des axes se base, cette fois-ci,

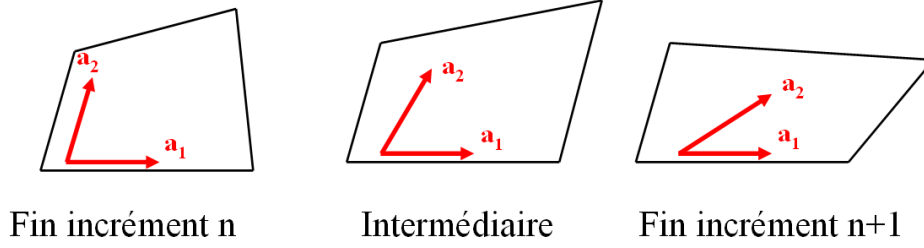


FIGURE III.3 – Quelle configuration pour la réactualisation des axes d'anisotropie ?

sur des critères numériques. Pour des raisons de convergence numérique, et afin de travailler sur une configuration fixe sur toutes les itérations d'un même incrément, les axes d'anisotropie seront réactualisés selon la transformation au début de l'incrément :

$$\begin{aligned} a_1^{n+1} &= [\mathbf{F}]^n a_1^n, [\mathbf{F}]^n = \frac{\partial X^{n+1}}{\partial X^n} \\ a_2^{n+1} &= [\mathbf{F}]^n a_2^n \\ a_3^{n+1} &= a_1^n \wedge a_2^n \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

### III.2.1.c L'intégration incrémentale de la formulation anisotrope

L'intégration d'un comportement anisotrope dans une formulation incrémentale doit prendre en compte les spécificités du logiciel de calcul utilisé, afin d'avoir une architecture compatible avec celui-ci. Des grandeurs tensorielles doivent être disponibles au début de l'incrément afin de permettre le calcul de l'état de contrainte à la fin de l'incrément.

- Au début de l'incrément, les grandeurs tensorielles et scalaires disponibles sont :
- les vitesses des noeuds durant l'incrément :  $v^{n+1}$
  - le déviateur des contraintes dans le repère local à la fin de l'incrément n :  $\{\mathbf{S}\}_{mat}^n$
  - La direction des axes d'anisotropie :  $\vec{a}_i, i = 1, 2, 3$
  - le pas de temps de l'incrément :  $dt$

Les relations de la mécanique des grandes transformations (sec. II.1) permettent de calculer le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$ , et donc d'en déduire le déviateur des vitesses de déformation  $[\dot{\epsilon}]$  dans le repère de référence. A partir des grandeurs disponibles et celles calculées précédemment, l'état de contrainte à la fin de l'incrément  $S_{mat}^{n+1}$  et  $S_{ref}^{n+1}$ , respectivement dans le repère matériau et de référence, ainsi que les deux modules tangents  $[\mathbf{B}^l]$  et  $[\mathbf{B}^b]$  doivent être déterminés. Les équations d'équilibre sont vérifiées, et une nouvelle itération est effectuée en cas de non convergence. Si on obtient la convergence, les axes d'anisotropie sont réactualisés pour permettre le calcul de

l'incrément suivant. On peut résumer l'algorithme général à la figure III.4.

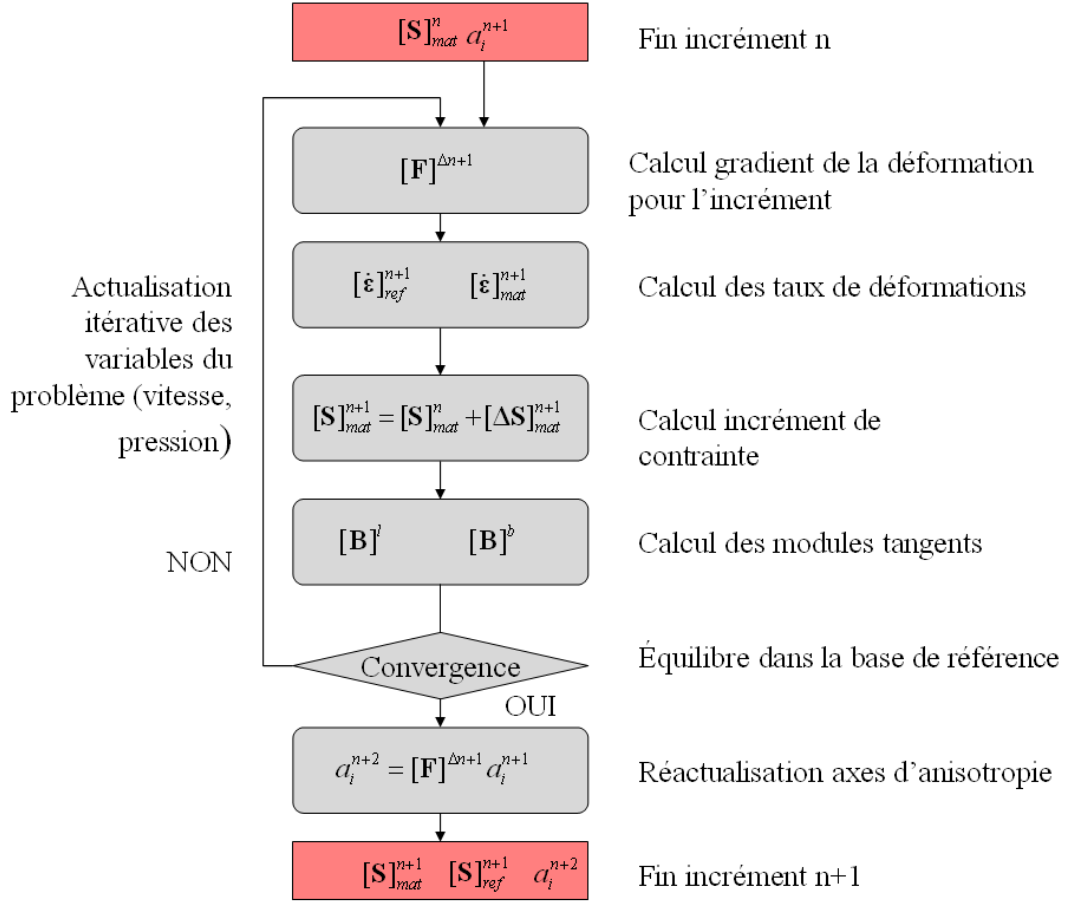


FIGURE III.4 – Algorithme général pour l'intégration de la formulation anisotrope dans un logiciel de calcul

### III.2.2 Le calcul de l'incrément de contrainte

Le calcul de l'incrément de contrainte permet de déterminer l'état de contrainte dans le matériau à la fin de l'incrément. On peut décomposer la vitesse déformation en une vitesse de déformation plastique  $[\dot{\epsilon}]^p$  et une vitesse de déformation élastique  $[\dot{\epsilon}]^e$  :

$$[\dot{\epsilon}] = [\dot{\epsilon}]^p + [\dot{\epsilon}]^e \quad (\text{III.22})$$

On suppose une plasticité associée, c'est-à-dire que le tenseur des vitesses de déformation plastique  $[\dot{\epsilon}]^p$  peut être exprimé en fonction de la normale à la surface de plasticité et du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  :

$$[\dot{\epsilon}]^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \quad (\text{III.23})$$

De plus, la vitesse de déformation plastique équivalente peut être reliée au multiplicateur par la relation suivante :

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon} \quad (\text{III.24})$$

Un algorithme du retour radial [Simo05] [Titeux04] permet le calcul de l'incrément de contrainte, effectué dans la base locale (Fig. III.5). Les indices 'mat' et 'ref' indique respectivement la base locale et la base de référence. De plus la notation  $\Delta A$  signifie la valeur incrémentale de A, 'A(t).dt'.

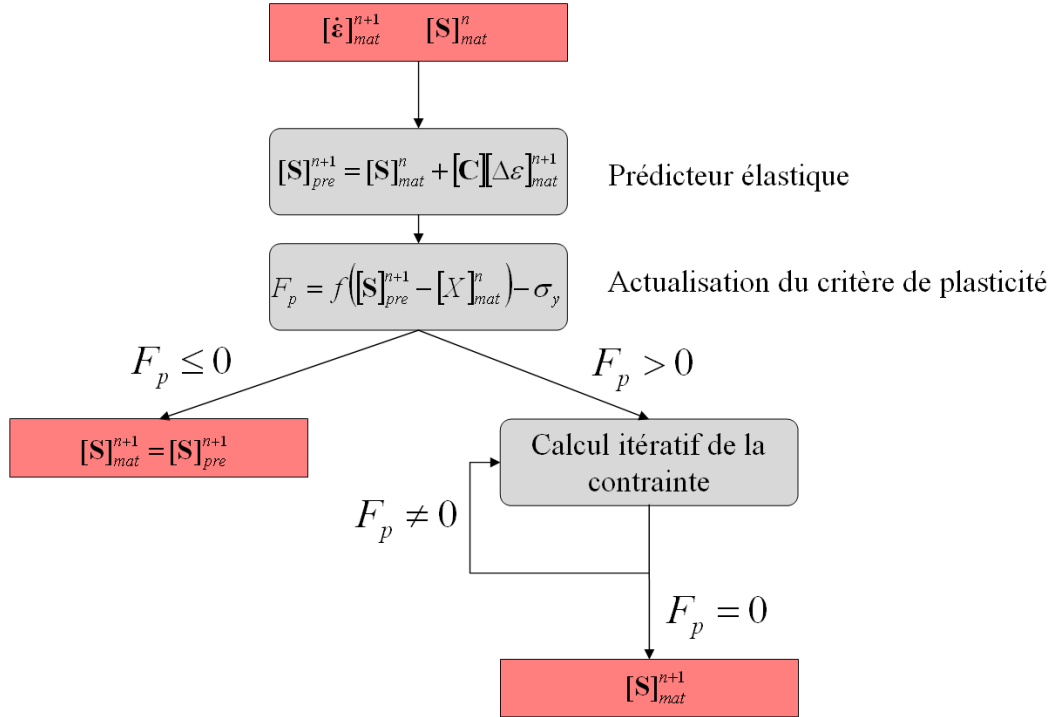


FIGURE III.5 – Algorithme du retour radial

A chaque instant de la transformation, le critère de plasticité  $F_p$  doit être nul, en cas de calcul élasto-plastique, ou négatif pour un chargement purement élastique. La première étape consiste à déterminer le type de transformation à considérer. On suppose, dans un premier temps une transformation purement élastique. Les contraintes issues du prédicteur élastique  $\{\mathbf{S}\}_{pre}^{n+1}$  sont calculées avec la loi élastique de Hooke définie par la matrice d'élasticité  $[\mathbf{C}]$ . On notera l'utilisation de la notation de Voigt afin de simplifier les écritures :

$$\{\mathbf{S}\}_{pre}^{n+1} = [\mathbf{C}]\{\Delta\epsilon\}_{mat}^{n+1} + \{\mathbf{S}\}_{mat}^n \quad (\text{III.25})$$

Le critère de plasticité est réactualisé avec l'état de contrainte calculé, et suivant la valeur de  $F_p$ , le type de la transformation peut être déterminé. En cas de transformation

purement élastique ( $F_p \leq 0$ ), les contraintes à la fin de l'incrément sont les contraintes issues du prédicteur élastique :

$$\{\mathbf{S}\}_{mat}^{n+1} = \{\mathbf{S}\}_{pre}^{n+1} \quad (\text{III.26})$$

Dans le cas d'une transformation élasto-plastique ( $F_p > 0$ ), un calcul élasto-plastique permet de séparer la déformation plastique et élastique (Fig. III.6). À partir d'un état de contrainte caractérisé par le point A sur la figure III.6, le prédicteur élastique détermine un état de contrainte en dehors de la surface de plasticité (point B), ce qui est physiquement incorrect. L'algorithme du retour radial va permettre de déterminer le multiplicateur plastique  $\lambda$  pour revenir radialement à la surface de plasticité obtenue à la fin de l'incrément (point C). L'algorithme va donc permettre de déterminer un chargement tel que le critère de plasticité soit nul. Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\epsilon\}^e + \{\Delta\epsilon\}^p \\ F_p = f(\mathbf{S} - \mathbf{X}) - \sigma_y = 0 \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

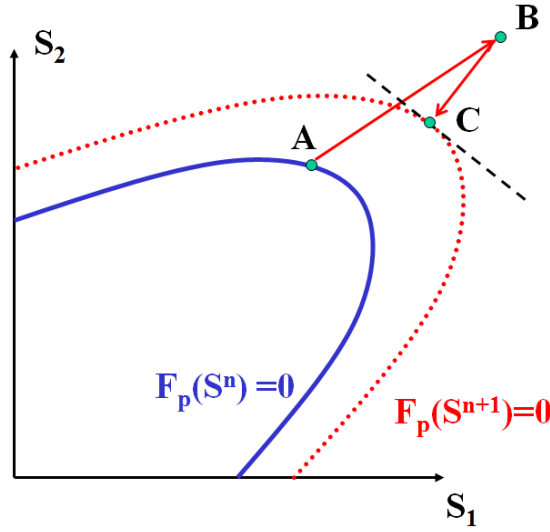


FIGURE III.6 – Algorithme du retour radial : prédicteur élastique et correcteur plastique

La contrainte à la fin de l'incrément peut s'exprimer en fonction de la déformation élastique comme le montre la figure III.7. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \{\Delta\mathbf{S}\}_{mat} &= [\mathbf{C}]\{\Delta\epsilon\}_{mat}^e \\ &= [\mathbf{C}](\{\Delta\epsilon\}_{mat} - \{\Delta\epsilon\}_{mat}^p) \\ &= [\mathbf{C}] \left( \{\Delta\epsilon\}_{mat} - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial (\mathbf{S} - \mathbf{X})} \Big|_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

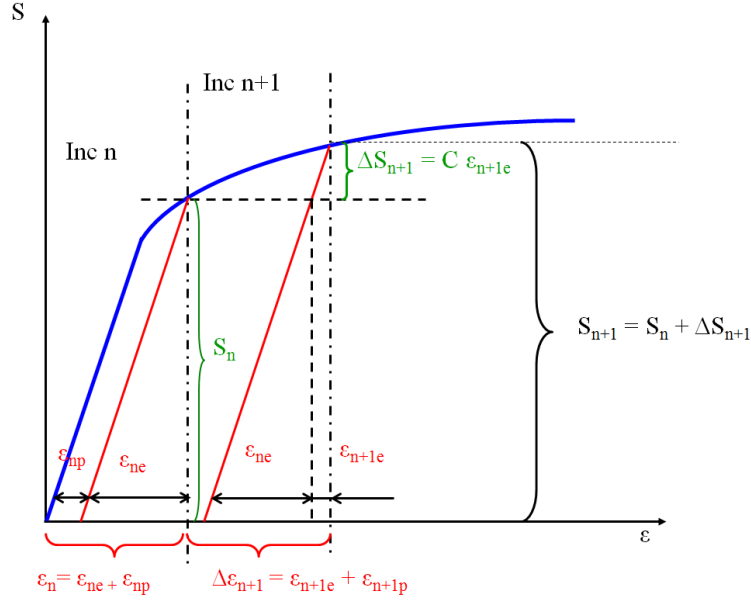


FIGURE III.7 – Calcul de l'incrément de contrainte : schéma explicatif

On arrive donc à l'expression de la contrainte à la fin de l'incrément :

$$\{\mathbf{S}\}_{mat}^{n+1} = [\mathbf{C}] \left( \{\Delta \epsilon\} - \Delta \lambda \frac{\partial f(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial \mathbf{S} - \mathbf{X}} \Big|_{n+1} \right) + \{\mathbf{S}\}_{mat}^n \quad (\text{III.29})$$

Pour calculer l'état de contrainte à la fin de l'incrément, la dérivée du critère de plasticité, c'est à dire la normale à la surface de charge, doit être définie. Dans la suite du document, afin de simplifier la compréhension des écritures, l'écouissage cinématique  $[\mathbf{X}]$  sera

### III.2.3 Les modules tangents linéaire et bulle

Les modules tangents linéaire  $[\mathbf{B}^l]$  et bulle  $[\mathbf{B}^b]$  doivent être calculés pour permettre la convergence de l'algorithme résolvant le problème mécanique (équation III.6). Ceux-ci seront donc exprimés en fonction des caractéristiques du comportement du matériau, tel que l'écouissage isotrope, le critère de plasticité et la matrice d'élasticité. Lors d'un chargement purement élastique, la solution est directe, les modules tangents sont égaux à la matrice d'élasticité. Au contraire, lors d'une transformation élasto-plastique, le calcul est plus complexe. Dans la suite de cette partie, afin de simplifier la compréhension des écritures, l'écouissage cinématique  $[\mathbf{X}]$  sera compris dans le déviateur des contraintes  $[\mathbf{S}]$

En dérivant l'équation III.29, on obtient :

$$\{d\mathbf{S}\} = [\mathbf{C}]\{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\} - [\mathbf{C}]d\Delta\lambda\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} - \Delta\lambda[\mathbf{C}]\frac{\partial^2 f(\mathbf{S})}{\partial (\mathbf{S})^2}(\{d\mathbf{S}\}) \quad (\text{III.30})$$

en factorisant cette équation, on peut la transformer en :

$$\{d\mathbf{S}\} = [\mathbf{P}] \left( \{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\} - d\Delta\lambda\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} - \Delta\lambda\frac{\partial^2 f(\mathbf{S})}{\partial (\mathbf{S})^2}\{d\mathbf{X}\} \right) \quad (\text{III.31})$$

Avec l'expression de la variable  $[\mathbf{P}]$  suivante, avec  $[\mathbf{I}]$  la matrice unitaire de taille 6 :

$$[\mathbf{P}] = \left( [\mathbf{I}] + \Delta\lambda[\mathbf{C}]\frac{\partial^2 f(\mathbf{S})}{\partial (\mathbf{S})^2} \right)^{-1} [\mathbf{C}] \quad (\text{III.32})$$

En considérant l'utilisation d'une loi d'écrouissage cinématique de type Armstrong-Frederick (équation I.37), on peut exprimer la variable  $\{d\mathbf{X}\}$  en fonction des paramètres de la loi de comportement :

$$\{d\mathbf{X}\} = Dd\Delta\dot{\epsilon}^p - \xi\{\mathbf{X}\}d\Delta\bar{\epsilon}^p \quad (\text{III.33})$$

On intègre ensuite l'équation III.33 à l'équation III.31, et on néglige les termes en  $\Delta^2$  en supposant un pas de temps faible. On obtient alors l'expression de  $\{d\mathbf{S}\}$  :

$$\{d\mathbf{S}\} = [\mathbf{P}] \left( \{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\} - d\Delta\lambda\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \right) \quad (\text{III.34})$$

On introduit la décomposition de la vitesse en une partie linéaire et une partie bulle et on obtient alors la décomposition suivante de la vitesse de déformation :

$$\begin{aligned} \{\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\vec{v}_e)\} &= \{\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\vec{v}_e^l)\} + \{\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\vec{b})\} \\ \{\Delta\boldsymbol{\epsilon}(\vec{v}_e)\} &= \{\Delta\boldsymbol{\epsilon}\}^l + \{\Delta\boldsymbol{\epsilon}\}^b \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

L'équation III.34 peut donc se réécrire en fonction de la partie linéaire et vitesse bulle :

$$\{d\mathbf{S}\} = [\mathbf{P}] \left( \{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\}^l + \{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\}^b - d\Delta\lambda\frac{\partial f(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial \mathbf{S} - \mathbf{X}} \right) \quad (\text{III.36})$$

Or le multiplicateur plastique est seulement dépendant de la contribution de la vitesse linéaire, on peut donc écrire les contributions de la contrainte linéaire et bulle :

$$\{d\mathbf{S}\}^l = [\mathbf{P}] \left( \{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\}^l - d\Delta\lambda\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \right) \quad (\text{III.37})$$

$$\{d\mathbf{S}\}^b = [\mathbf{P}] \left( \{d\Delta\boldsymbol{\epsilon}\}^b \right) \quad (\text{III.38})$$

Le calcul des deux modules tangents va être détaillé dans la suite de cette section pour permettre l'implémentation de la formulation anisotrope dans le logiciel implicite Forge<sup>®</sup>.

### III.2.3.a Module tangent linéaire

Lors d'un calcul élasto-plastique, le critère de plasticité est nul. La dérivée de dernier permet donc de déterminer l'expression de la variable  $d\Delta\lambda$ , que l'on peut relier à la déformation plastique par les équations III.23 et III.24. On obtient donc :

$$d\Delta\lambda = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial(\mathbf{S})}[\mathbf{P}]\{d\Delta\epsilon\}}{\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial(\mathbf{S})}[\mathbf{P}]\frac{\partial f(\mathbf{S})}{\partial(\mathbf{S})} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial\bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\dot{\bar{\epsilon}}^p}} \quad (\text{III.39})$$

En combinant cette dernière équation avec l'équation III.34, on obtient l'expression du module tangent linéaire dans le base matérielle  $[\mathbf{B}^l]_{mat}$  :

$$[\mathbf{B}^l]_{mat} = [\mathbf{P}] - \frac{[\mathbf{P}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}[\mathbf{P}]}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}[\mathbf{P}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} - \left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial\bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\dot{\bar{\epsilon}}}\right)} \quad (\text{III.40})$$

L'expression du module tangent dans la base de référence s'exprime en fonction des changements de base  $[\mathbf{T}_c]$  (équation II.41) et  $[\mathbf{T}_d]$  (équation II.40) :

$$[\mathbf{B}^l]_{ref} = [\mathbf{T}_c][\mathbf{B}^l]_{mat}[\mathbf{T}_d] \quad (\text{III.41})$$

### III.2.3.b Module tangent bulle

L'expression du module tangent bulle est directe à partir de l'expression de la contrainte bulle (équation III.38). On obtient donc le module tangent bulle, exprimé dans repère matériau :

$$[\mathbf{B}^b]_{mat} = \left( [\mathbf{I}] + \Delta\lambda[\mathbf{C}]\frac{\partial^2 f(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial(\mathbf{S} - \mathbf{X})^2} \right)^{-1} [\mathbf{C}] \quad (\text{III.42})$$

Le calcul des modules tangent linéaire et bulle nécessite la définition des dérivées, première et seconde, du critère de plasticité par rapport au déviateur des contraintes. Cela peut grandement complexifier l'intégration de certains critères de plasticité, dont la dérivée n'est pas calculable à l'instant  $n+1$ .

## III.2.4 Pas de temps adaptatif

Une méthode de pas de temps adaptatif a été mise en place pour permettre l'accélé-



ration du temps de calcul de la simulation. En effet, de nombreux points de bifurcations peuvent apparaître au cours de la résolution mécanique du système pour un comportement anisotrope élasto-plastique. Un faible pas de temps permet au calcul de passer ceux-ci sans encombres. L'utilisateur définit donc un pas de temps initial  $\Delta t_{ini}$ , minimal  $\Delta t_{min}$  et maximal  $\Delta t_{max}^{util}$ . Au cours de la simulation, un pas de temps maximal pour l'incrément en cours est déterminé à partir de la vitesse de déformation plastique :

$$\Delta t_{max}^{n+1} = \frac{1}{\dot{\bar{\epsilon}}_{max}} 1.10^{-3} \quad (\text{III.43})$$

La stratégie adoptée pour la gestion du pas de temps de l'incrément  $n+1$  en fonction de l'incrément  $n$  est résumé au cours du graphe III.8. Le pas de temps maximal calculé est comparé au pas de temps  $\Delta t_p^{n+1}$ . Le choix du pas de temps pour l'incrément suivant dépend donc de la valeur de la vitesse de déformation plastique équivalente maximale sur l'incrément précédent.

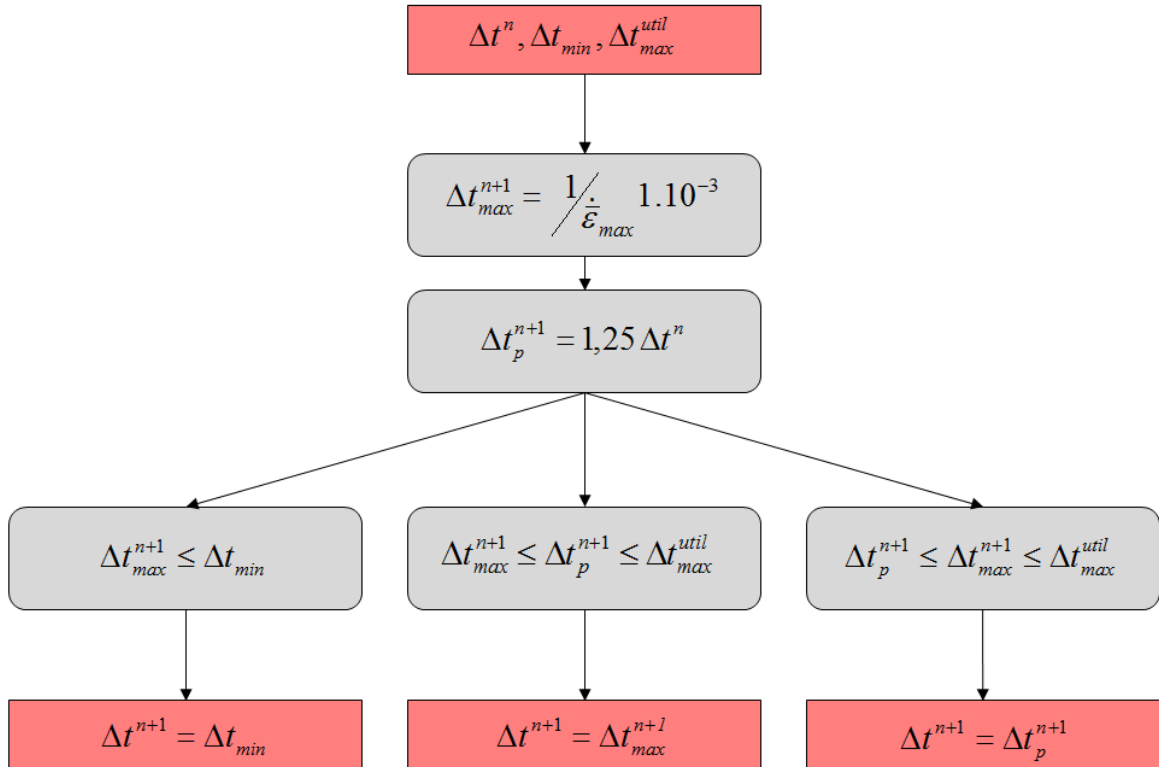


FIGURE III.8 – Stratégie d'actualisation du pas de temps au cours de la simulation

La figure III.9 illustre la variation du pas de temps au cours d'une simulation d'emboutissage d'un godet cylindrique. On peut remarquer une forte variation au fil des incréments afin de limiter les points de bifurcations et accélérer la convergence.

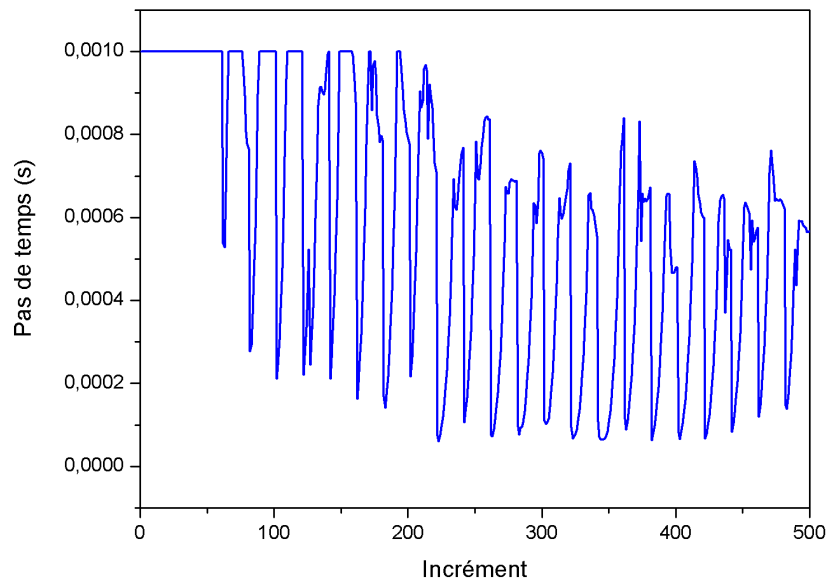


FIGURE III.9 – Variation du pas de temps au cours d'une simulation

L'efficacité d'une telle méthode a été testée sur une simulation d'emboutissage d'un godet cylindrique (section III.6.1). Elle permet d'accélérer par un facteur d'environ 4 le calcul de la mise en forme (environ 16h contre 4h). La nécessité d'une gestion d'un pas de temps adaptatif sur la vitesse de déformation plastique équivalente est démontrée dans cette partie et permet un gain de temps non négligeable lors de simulation de formage à froid.

### III.3 Calcul de l'incrément de contraintes pour le critère de Hill

L'intégration d'un critère de plasticité dans un logiciel éléments finis par l'algorithme du retour radial implique le calcul des dérivées première et seconde de la surface de plasticité, pour déterminer entre autre la normale à celle-ci. Le critère de Hill est défini dans la section I.3.1.b. L'expression de celui-ci est rappelée ci-dessous :

$$f(\mathbf{S} - \mathbf{X})^2 = \begin{pmatrix} S_{11} - X_{11} \\ S_{22} - X_{22} \\ S_{33} - X_{33} \\ S_{12} - X_{12} \\ S_{23} - X_{23} \\ S_{13} - X_{13} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} G + H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F + H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F + G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} - X_{11} \\ S_{22} - X_{22} \\ S_{33} - X_{33} \\ S_{12} - X_{12} \\ S_{23} - X_{23} \\ S_{13} - X_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Les dérivées du critère de Hill peuvent se calculer facilement :

$$\frac{\partial f(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial(\mathbf{S} - \mathbf{X})} \Big|_{n+1} = \frac{[\mathbf{H}]\{(\mathbf{S} - \mathbf{X})\}_{mat}^{n+1}}{f(\mathbf{S} - \mathbf{X})^{n+1}} \quad (\text{III.45})$$

$$\frac{\partial f^2(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial(\mathbf{S} - \mathbf{X})^2} \Big|_{n+1} = \frac{[\mathbf{H}]}{f(\mathbf{S} - \mathbf{X})} \quad (\text{III.46})$$

En combinant les équations III.29, III.45 et la définition du critère de plasticité, on peut exprimer l'incrément de contrainte élasto-plastique :

$$\{\mathbf{S}\}_{mat}^{n+1} - \{\mathbf{X}\}_{mat}^{n+1} = \left( [\mathbf{I}] + \Delta\lambda \frac{[\mathbf{C}][\mathbf{H}]}{\sigma_y^{n+1}} \right)^{-1} (\{\mathbf{S}\}_{mat}^n + [\mathbf{C}]\{\Delta\epsilon\}) \quad (\text{III.47})$$

La résolution du calcul élasto-plastique consiste donc à déterminer le multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$  afin de situer l'état de contrainte sur la surface de plasticité ( $F_p = 0$ ). Ce dernier peut s'exprimer uniquement en fonction du multiplicateur plastique. L'équation  $F_p(\Delta\lambda) = 0$  est résolue en utilisant un schéma itératif de Newton-Raphson. A chaque itération  $j$ , la mise à jour suivante est effectuée :

$$\Delta\lambda_{j+1} = \Delta\lambda_j - \frac{F_p(\lambda_j)}{F'_p(\lambda_j)} \quad (\text{III.48})$$

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut donc pouvoir exprimer la dérivée du critère de plasticité par rapport à  $\Delta\lambda$ ,  $F'_p(\lambda_j)$ . Pour le critère de Hill, le calcul de cette dérivée ne pose aucun problème :

$$\frac{dF_p}{d\Delta\lambda} = \frac{\partial F_p}{\partial(\mathbf{S} - \mathbf{X})} \frac{\partial(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\partial\Delta\lambda} - \frac{d\sigma_y}{d\Delta\lambda} \quad (\text{III.49})$$

Avec :

$$\frac{dF_p}{d(\mathbf{S} - \mathbf{X})} = \frac{[\mathbf{C}][\mathbf{H}]}{\sigma_y} \mathbf{S} \quad (\text{III.50})$$

$$[\mathbf{T}] = \left( [\mathbf{I}] + \Delta\lambda \frac{[\mathbf{C}][\mathbf{H}]}{\sigma_y} \right) \quad (\text{III.51})$$

$$\frac{d(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{d\Delta\lambda} = [\mathbf{T}]^{-1} \frac{[\mathbf{C}][\mathbf{H}]}{\sigma_y} [\mathbf{T}]^{-1} (\{\mathbf{S}_n\} + [\mathbf{C}]\{\Delta\epsilon\}) \quad (\text{III.52})$$

$$\frac{d\sigma_y}{d\Delta\lambda} = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\epsilon}} \frac{1}{dt} + \frac{d\sigma_y}{d\bar{\epsilon}} \quad (\text{III.53})$$

Le critère de convergence est fixé sur le critère de plasticité  $F_p$ . Pour obtenir un critère de plasticité inférieur à  $1.10^{-6}$ , une dizaine d'itérations est nécessaire. Le calcul des modules tangents est lui aussi direct en intégrant les dérivées du critère de Hill dans celui-ci. L'intégration d'un critère de Hill dans un logiciel éléments finis est classique et l'application de l'algorithme du retour radial suffit. Le second critère implémenté est le critère non quadratique de Cazacu, pour lequel des développements mathématiques sont nécessaires.

## III.4 Implémentation du critère de Cazacu

Le critère de Cazacu est un critère non quadratique (section I.3.1.c) dont on rappelle l'expression ci-dessous :

$$f(\mathbf{S} - \mathbf{X}) = \frac{1}{B} \left( \sum_{i=I..III}^3 (|\tilde{S}_i| - k\tilde{S}_i)^a \right)^{1/a} \quad (\text{III.54})$$

$[\mathbf{S}]$  représente le déviateur des contraintes, mais la variable  $[\tilde{\mathbf{S}}]$  est un tenseur. Le calcul des contraintes principales, de l'incrément de contrainte, et des dérivées du critère doivent être déterminés pour pouvoir calculer les contraintes dans le repère local. Dans un premier temps, la valeur du critère de plasticité doit être calculée.

### III.4.1 Calcul des contraintes principales d'un tenseur

Par définition, déterminer les contraintes principales d'un tenseur implique la diagonalisation de celui-ci. Cependant une autre méthode, basée sur les invariants du tenseur

et du déviateur associé, est utilisée dans l'intégration du critère de Cazacu. On associe au tenseur  $[\boldsymbol{\sigma}]$  son déviateur  $[\mathbf{S}]$  et les invariants associés  $J_2$  et  $J_3$  :

$$p = \frac{1}{3} \text{tra}([\boldsymbol{\sigma}]) \quad (\text{III.55})$$

$$[\mathbf{S}] = [\boldsymbol{\sigma}] - p[\mathbf{I}] \quad (\text{III.56})$$

$$J_2 = \text{tra}([\mathbf{S}]^2) \quad (\text{III.57})$$

$$J_3 = \det([\mathbf{S}]^3) \quad (\text{III.58})$$

Pour un déviateur des contraintes  $[\mathbf{S}]$ , les contraintes principales sont les suivantes [Malvern69] :

$$S_I = 2\cos(\alpha)\sqrt{\frac{J_2}{3}} \quad (\text{III.59})$$

$$S_{II} = 2\cos(\alpha - \frac{2\pi}{3})\sqrt{\frac{J_2}{3}} \quad (\text{III.60})$$

$$S_{III} = 2\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})\sqrt{\frac{J_2}{3}} \quad (\text{III.61})$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{J_3}{2} \left(\frac{3}{J_2}\right)^{3/2}\right) \quad (\text{III.62})$$

Dans le cas d'un tenseur, des formules similaires peuvent être déduites en intégrant la pression. On obtient donc :

$$\sigma_I = 2\cos(\alpha_1)\sqrt{\frac{J_2}{3}} + p \quad (\text{III.63})$$

$$\sigma_{II} = 2\cos(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3})\sqrt{\frac{J_2}{3}} + p \quad (\text{III.64})$$

$$\sigma_{III} = 2\cos(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3})\sqrt{\frac{J_2}{3}} + p \quad (\text{III.65})$$

Le calcul des contraintes principales du tenseur  $[\mathbf{S}]$  est nécessaire pour la détermination de la valeur du critère de plasticité. L'application de cette méthode permet d'omettre la diagonalisation du tenseur. De plus, le calcul des dérivées du critère de plasticité est facilité par l'utilisation des invariants du déviateur.

### III.4.2 Calcul de l'incrément de contrainte

On utilise l'algorithme du retour radial comme précédemment, et toutes les grandeurs utilisées sont exprimées dans la base locale. De plus, afin de simplifier les écritures,

le déviateur de l'écoulement cinématique n'est pas pris en compte. On a donc :

$$\{\Delta\epsilon\} - [\mathbf{C}]^{-1}\{\Delta\mathbf{S}\} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{n+1} = 0 \quad (\text{III.66})$$

$$F_p(\{\mathbf{S}_{n+1}\}, \bar{\epsilon}_{n+1}, \dot{\epsilon}) = 0 \quad (\text{III.67})$$

Dans ce cas, contrairement au critère de Hill, on ne peut exprimer la normale à la surface de plasticité en fonction des composantes du déviateur des contraintes. Il faut donc utiliser un développement limité au premier ordre. On obtient donc pour l'équation III.66 :

$$\{\dot{\epsilon}\} - [\mathbf{C}]^{-1}\{\Delta\mathbf{S}\} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_n - \left( [\mathbf{C}]^{-1} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{S}^2}|_n \right) d\Delta\mathbf{S} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_n d\Delta\lambda = 0 \quad (\text{III.68})$$

De la même manière, on obtient l'expression de l'équation III.67 :

$$F_p(\{\mathbf{S}_{n+1}\}, \bar{\epsilon}_{n+1}, \dot{\epsilon}) + \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{S}}|_n d\Delta\mathbf{S} + \left( \frac{\partial F_p}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial F_p}{\partial \dot{\epsilon}} \right) d\Delta\bar{\epsilon} = 0 \quad (\text{III.69})$$

Dans la suite, on peut remarquer l'équivalence entre le terme  $\left( \frac{\partial F_p}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial F_p}{\partial \dot{\epsilon}} \right)$  et le terme  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta \lambda}$ . L'incrément de contrainte sera donc calculé par un processus itératif. On effectue d'abord une correction  $d\Delta\lambda$  sur le multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$ . Avec la nouvelle valeur de ce paramètre, on calcule la correction sur l'incrément de contrainte  $\Delta\mathbf{S}$ . Les deux expressions des corrections sont les suivantes [Knockaert01], avec  $[\mathbf{P}]$  exprimé par l'équation III.32 :

$$d\Delta\lambda = \frac{F_p + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}[\mathbf{P}]^{-1}(\{\Delta\epsilon\} - [\mathbf{C}]\Delta\mathbf{S} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}})}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}[\mathbf{P}]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta\lambda}} \quad (\text{III.70})$$

$$\{d\Delta\mathbf{S}\} = [\mathbf{P}]^{-1}(\{\Delta\epsilon\} - [\mathbf{C}]\Delta\mathbf{S} - (\Delta\lambda + d\Delta\lambda) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}) \quad (\text{III.71})$$

L'initialisation de l'algorithme itératif s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_0 &= 0 \\ \Delta\mathbf{S}_0 &= \mathbf{C}\{\Delta\epsilon\} \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Si la solution initiale est trop éloignée de la convergence, l'algorithme de Newton-Raphson peut ne pas converger. Un algorithme de recherche linéaire permet de passer

outre ce problème [Dukto93]. Si la solution à un nouvel incrément est plus éloigné que la solution de l'incrément précédent :

$F_p \left( \{S_n + \Delta S + d\Delta S\}, \bar{\epsilon}_n + \Delta \bar{\epsilon} + d\Delta \bar{\epsilon}, \frac{\Delta \bar{\epsilon} + d\Delta \bar{\epsilon}}{\Delta t} \right) > \left( \{S_n + \Delta S\}, \bar{\epsilon}_n + \Delta \bar{\epsilon}, \frac{\Delta \bar{\epsilon}}{\Delta t} \right)$ , on multiplie les corrections sur le déviateur des contraintes et sur le multiplicateur plastique par une constante  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} d\Delta S &\longrightarrow \gamma d\Delta S \\ d\Delta \lambda &\longrightarrow \gamma d\Delta \lambda \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

Le paramètre constant  $\alpha$  est choisi pour minimiser le critère de plasticité. Il est compris dans l'intervalle  $\left[ -\frac{\Delta \lambda}{d\Delta \lambda}, 2 \right]$ . Cette procédure, très simple à mettre en place, permet d'assurer la convergence et donc de calculer l'incrément de contrainte.

### III.4.3 Calcul des dérivées du critère de Cazacu

Comme précédemment, les dérivées première et seconde doivent être calculées pour un état de contrainte  $\{\mathbf{S}\}$ . La dérivée première est déterminée analytiquement, mais la dérivée seconde est obtenue numériquement.

#### III.4.3.a Dérivée première du critère de Cazacu

La dérivation d'une telle expression nécessite de procéder par étape et d'utiliser les propriétés des dérivées partielles.

Afin de calculer plus facilement la dérivée du critère plasticité, on pose :

$$f_s = (|\tilde{S}_I| - k\tilde{S}_I)^a + (|\tilde{S}_{II}| - k\tilde{S}_{II})^a + (|\tilde{S}_{III}| - k\tilde{S}_{III})^a \quad (\text{III.74})$$

Le critère s'écrit donc :

$$f = \frac{1}{B} f_s^{1/a} \quad (\text{III.75})$$

La première étape du calcul donne l'expression suivante

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{B} \frac{1}{a} \frac{\partial f_s}{\partial S} * f_s^{1/a-1} \quad (\text{III.76})$$

On utilise la méthode des dérivées partielles pour calculer la dérivée de  $f_s$  par rapport à  $S_{ij}$  :

$$\frac{\partial f_s}{\partial S} = \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{S}_I} * \frac{\partial \tilde{S}_I}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{S}_{II}} * \frac{\partial \tilde{S}_{II}}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{S}_{III}} * \frac{\partial \tilde{S}_{III}}{\partial \mathbf{S}} \quad (\text{III.77})$$

La dérivée de  $f_s$  par rapport à la contrainte principale  $\tilde{S}_i$  dépend du signe de cette dernière :

$$\begin{aligned} Si \quad \tilde{S}_i \geq 0, \quad \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{S}_i} &= a(1-k)^a \tilde{S}_i^{a-1} \\ Si \quad \tilde{S}_i < 0, \quad \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{S}_i} &= a(-1-k)^a \tilde{S}_i^{a-1} \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

Le changement de base intégrant l'anisotropie au critère isotrope doit être pris en compte, on a donc :

$$\forall i, m, n \in [1, 3], \quad \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial S_{mn}} = \sum_{k=1..3} \sum_{l=1..3} \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \tilde{S}_{kl}} \frac{\partial \tilde{S}_{kl}}{\partial S_{mn}} \quad (\text{III.79})$$

Pour la suite, on pose  $\tilde{S}_d = \tilde{S} - 1/3 \text{tra}(\tilde{\mathbf{S}})\{\mathbf{I}\}$ . On va donc calculer la dérivée des contraintes principales par rapport au tenseur des contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}$  :

$$\frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \tilde{S}_{mn}} = \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tilde{S}_{mn}} + \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \tilde{S}_{mn}} + \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \tilde{S}_{mn}} \quad (\text{III.80})$$

Les dérivées concernant la pression sont directes, par contre pour celles prenant en compte les deux autres invariants, il faut encore utiliser les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial J_2} = -2 \frac{\partial \alpha}{\partial J_2} * \sin(\alpha + \theta_i) \sqrt{\frac{J_2}{3}} + \cos(\alpha + \theta_i) * \frac{1}{\sqrt{3J_2}} \quad (\text{III.81})$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial J_3} = -2 \frac{\partial \alpha}{\partial J_3} * \sin(\alpha + \theta_i) * \sqrt{\frac{J_2}{3}} \quad (\text{III.82})$$

Avec  $\theta_i = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$ . La dérivée de l'expression de  $\alpha$  est la suivante :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial J_2} = \frac{1}{2} * 3^{1.5} \frac{J_3}{2} J_2^{-2.5} * \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{J_3}{2} * \frac{3^{3.0/2.0}}{J_2} \right)^2}} \quad (\text{III.83})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial J_3} = -\frac{1}{6} \frac{3^{3.0/2.0}}{J_2} * \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{J_3}{2} * \frac{3^{3.0/2.0}}{J_2} \right)^2}} \quad (\text{III.84})$$

Les invariants sont donc dérivables par rapport aux termes du déviateur. Les expressions suivantes sont donc obtenues :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \tilde{S}_{mn}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} (2\tilde{S}_{d11} - \tilde{S}_{d22} - \tilde{S}_{d33}) \\ \frac{1}{3} (-\tilde{S}_{d11} + 2\tilde{S}_{d22} - \tilde{S}_{d33}) \\ \frac{1}{3} (-\tilde{S}_{d11} - \tilde{S}_{d22} + 2\tilde{S}_{d33}) \\ 2\tilde{S}_{d12} \\ 2\tilde{S}_{d23} \\ 2\tilde{S}_{d13} \end{bmatrix} \quad (\text{III.85})$$



$$\frac{\partial J_3}{\partial \tilde{S}_{mn}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\tilde{S}_{d22}\tilde{S}_{d33} - \frac{1}{3}(\tilde{S}_{d11}\tilde{S}_{d33} + \tilde{S}_{d11}\tilde{S}_{d22}) + \frac{1}{3}(\tilde{S}_{d13}^2 \cdot 0 + \tilde{S}_{d12}^2 - \tilde{S}_{d23}^2) \\ \frac{2}{3}\tilde{S}_{d11}\tilde{S}_{d33} - \frac{1}{3}(\tilde{S}_{d22}\tilde{S}_{d33} + \tilde{S}_{d22}\tilde{S}_{d11}) + \frac{1}{3}(\tilde{S}_{d23}^2 + \tilde{S}_{d12}^2 - 2\tilde{S}_{d13}^2) \\ \frac{2}{3}\tilde{S}_{d22}\tilde{S}_{d11} - \frac{1}{3}(\tilde{S}_{d22}\tilde{S}_{d33} + \tilde{S}_{d11}\tilde{S}_{d33}) + \frac{1}{3}(\tilde{S}_{d13}^2 \cdot 0 + \tilde{S}_{d23}^2 - 2\tilde{S}_{d12}^2) \\ 2\tilde{S}_{d23}\tilde{S}_{d13} - 2\tilde{S}_{d33}\tilde{S}_{d12} \\ 2\tilde{S}_{d12}\tilde{S}_{d13} - 2\tilde{S}_{d11}\tilde{S}_{d23} \\ 2\tilde{S}_{d12}\tilde{S}_{d23} - 2\tilde{S}_{d13}\tilde{S}_{d22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.86})$$

Toutes les étapes concernant le calcul de la dérivée du critère de Cazacu sont décrites ci-dessus. La dérivée seconde de ce critère ne peut pas être calculée de manière analytique de façon simple. On utilise donc un schéma numérique pour calculer cette dernière.

#### III.4.3.b Calcul de la dérivée seconde du critère de Cazacu

Pour avoir une valeur de la dérivée seconde du critère de Cazacu, on utilise un schéma numérique centré. La dérivée seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{S}^2}$  est donc une matrice carrée de taille 6. Pour chaque état de contrainte  $\{\mathbf{S}\}$ , on définit deux vecteurs, à gauche  $\{\mathbf{S}-\} = \{\mathbf{S}\} - \{pas\}$  et à droite  $\{\mathbf{S}+\} = \{\mathbf{S}\} + \{pas\}$ . La dérivée première du critère de Cazacu est donc calculée pour ces deux états de contraintes. La dérivée seconde est donc numériquement exprimée par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{S}^2}|_{\sigma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\sigma-} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\sigma+}}{2pas} \quad (\text{III.87})$$

Les dérivées première et seconde du critère de Cazacu sont donc exprimées. L'incrément de contrainte peut être donc connu à chaque pas de temps. De plus, la dérivée seconde est nécessaire pour calculer le module tangent.

### III.5 Gestion de l'écrouissage isotrope

La modélisation du comportement implique la définition d'une loi d'écrouissage isotrope afin de caractériser la dilatation de la surface de plasticité au cours de la transformation. L'algorithme du retour radial, et le schéma de Newton-Raphson implique

qu'elle soit continue et dérivable pour des vitesses de déformations plastiques et des déformations plastiques compatibles avec celles rencontrées au cours des procédés de mise en forme. Les lois retenues pour la modélisation du comportement mécanique des alliages de titane sont des lois adoucissantes (équation I.43) définies au chapitre I. L'intégration d'un écrouissage isotrope dépendant de la direction de sollicitation implique le calcul des dérivées de celui-ci par rapport à la vitesse de déformation plastique équivalente et à la déformation plastique équivalente. Dans un premier temps, on considérera une loi isotrope indépendante de la direction de sollicitation, puis une dépendance à cette dernière sera ajoutée.

### III.5.1 Intégration de la loi adoucissante

L'intégration de la loi d'écrouissage complexe est directe. A partir d'une déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$  et d'une vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\bar{\epsilon}}$ , la grandeur  $\sigma_y$  doit être définie :

$$\sigma_y = \sqrt{3}K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n e^{-r\bar{\epsilon}} + K_{sat} (1 - e^{-r\bar{\epsilon}}) \quad (\text{III.88})$$

A partir de l'équation III.88, il est très facile de déterminer les dérivées nécessaires :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\epsilon}} = \sqrt{3}K (\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^{n-1} e^{-r\bar{\epsilon}} (n - r(\epsilon_0 + \bar{\epsilon})) + rK_{sat} e^{-r\bar{\epsilon}} \quad (\text{III.89})$$

Cependant, il est très rare qu'une modélisation par un écrouissage indépendant de l'orientation de la sollicitation reproduise correctement le comportement fortement anisotrope des alliages de titane. Pour ce faire, un écrouissage dépendant de la direction de chargement a été introduit.

### III.5.2 Intégration de la dépendance au chargement pour l'écrouissage isotrope

La figure III.10 indique schématiquement le rôle du critère de plasticité et de l'écrouissage isotrope lors de tests de traction. Le critère de plasticité permet de séparer la partie élastique de la partie plastique et la loi d'écrouissage modélise le comportement plastique. Cette figure montre bien les différences de pente et de courbure que l'on peut obtenir sur des écrouissages en fonction de l'orientation de la sollicitation. La modélisation de l'écrouissage sera basée sur la loi adoucissante (équation III.88), mais les paramètres  $K$ ,  $\epsilon_0$ ,  $n$ ,  $r$  et  $K_{sat}$  seront dépendants d'un angle  $\theta$ . Après avoir défini les cinq paramètres pour différentes directions de sollicitation, une interpolation linéaire

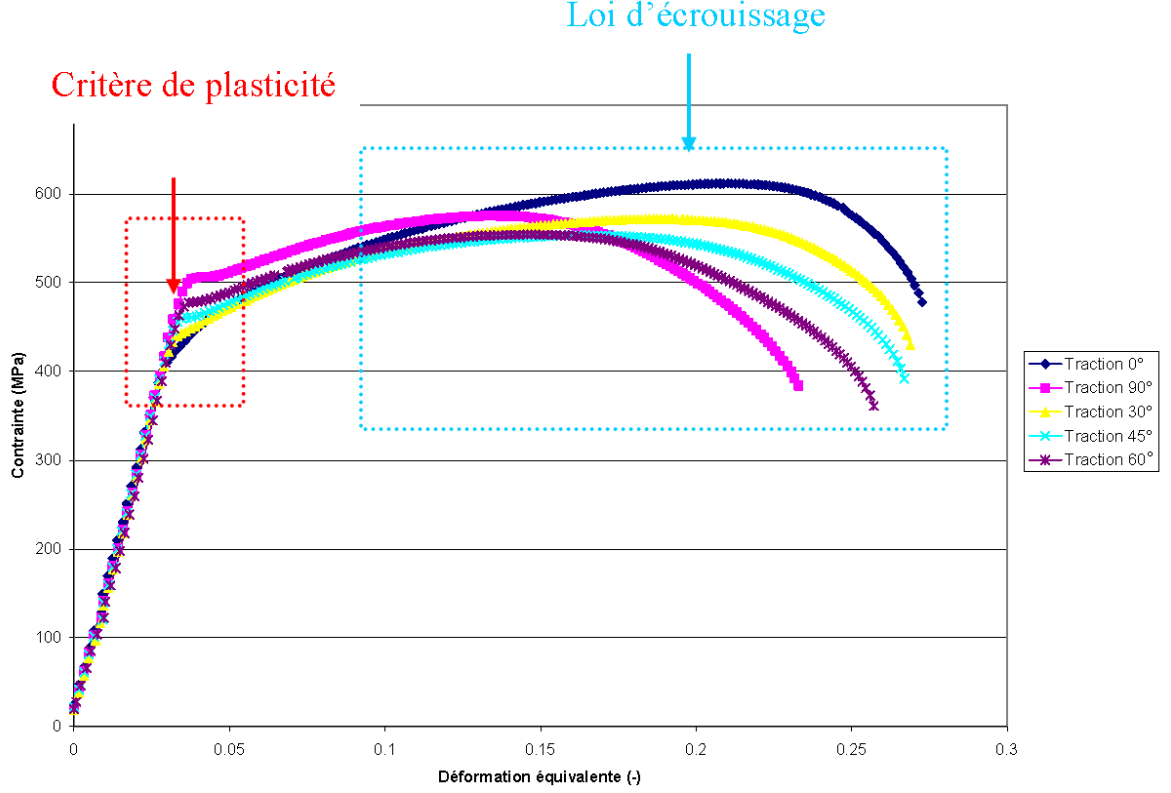


FIGURE III.10 – Courbe de traction suivant différentes direction de sollicitation

entre les orientations permettra de déterminer le jeu de paramètres utilisé pour le calcul de l'incrément de contrainte.

La détermination de l'angle  $\theta$ , représentatif de la direction de sollicitation par rapport à l'axe 1 d'anisotropie s'effectue à partir des vitesses nodales  $\vec{v}_i$ . Sur chaque élément, on peut alors déterminer la vitesse  $\vec{V}_p$  au point d'intégration :

$$\vec{V}_p = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \vec{v}_i \quad (\text{III.90})$$

Le vecteur vitesse peut se décomposer dans la base des directions d'anisotropie grâce à la relation suivante :

$$\vec{V}_p = (\vec{V}_p \cdot \vec{a}_1) \vec{a}_1 + (\vec{V}_p \cdot \vec{a}_2) \vec{a}_2 + (\vec{V}_p \cdot \vec{a}_3) \vec{a}_3 \quad (\text{III.91})$$

On peut donc en déduire la projection du vecteur  $\vec{V}_p$  dans le plan des deux premiers axes d'anisotropie, qui est aussi le plan de la tôle :

$$\vec{V}_p = \vec{V}_p - (\vec{V}_p \cdot \vec{a}_3) \vec{a}_3 \quad (\text{III.92})$$

L'angle  $\theta$  est obtenu par le produit scalaire entre le vecteur  $V_p$  et l'axe 1 d'anisotropie  $a_1$ , qui donne une valeur comprise entre 0 et  $\pi$ . La dernière opération consiste à choisir la bonne valeur de  $\theta$  en fonction du résultat obtenu à partir du produit scalaire. La figure III.11 indique l'ajustement sur la valeur de  $\theta$  pour permettre la détermination de l'orientation du chargement par rapport à la direction 1 d'anisotropie.

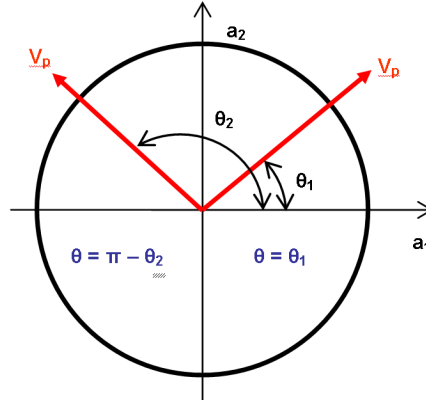


FIGURE III.11 – Ajustement de la valeur de  $\theta$

## III.6 Validation de l'implémentation de la formulation anisotrope sous Forge®

Différentes simulations de cas tests de mise en forme vont permettre de valider l'implémentation et la formulation du comportement élasto-plastique anisotrope. Dans un premier temps, l'emboutissage d'un godet modélisé par un comportement mécanique isotrope permettra de vérifier la validité des résultats. Dans un second temps, des cas tests de mise en forme issus de la littérature permettront de valider la formulation anisotrope choisie. Le critère de Cazacu n'a pu être validé dans cette partie, aucun test n'ayant été trouvé dans la littérature.

### III.6.1 Emboutissage d'un godet cylindrique isotrope

Dans cette partie, on choisira des paramètres de Hill et de Cazacu permettant de retrouver le critère de von Mises. Les paramètres de Hill suivant nous donnent un critère isotrope de von Mises :

$$\begin{aligned} F &= G = H = 0,5 \\ L &= M = N = 1,5 \end{aligned} \tag{III.93}$$

De même, le comportement isotrope de von Mises peut être modéliser par le critère de Cazacu (équation III.54), en définissant le jeu de paramètre suivant :

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ a &= 2 \\ C_{11} &= C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = C_{66} = 1 \\ C_{12} &= C_{13} = C_{23} = 0 \end{aligned} \tag{III.94}$$

Les géométries des outils et de la tôle initiale sont définies par la figure III.12. On considère uniquement un écrouissage isotrope défini par une loi de Norton-Hoff (équation I.44). Les caractéristiques de la simulation sont donc les suivantes :

- tôle initiale de diamètre 80 mm
- $E = 105000 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0,3$
- comportement isotrope de Von Mises
- loi d'écrouissage isotrope :  

$$\sigma_y = \sqrt{3} * 440 (0,0157 + \bar{\epsilon}^p)^{0,155}$$
- contacts glissants
- serrage du serre-flan : 4000 N

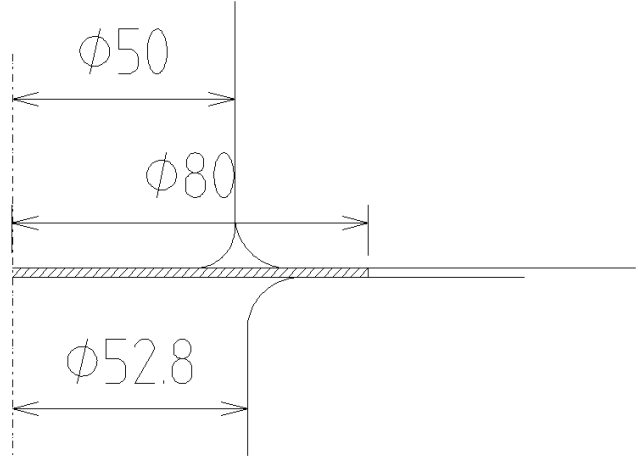


FIGURE III.12 – Géométrie de l'essai d'emboutissage d'un godet cylindrique

**i) Force d'emboutissage** La première grandeur de comparaison entre les différentes implémentations est la force d'emboutissage nécessaire pour la réalisation de la pièce. (Fig. III.13) On remarque que les forces d'emboutissage sont très proches pour les trois critères

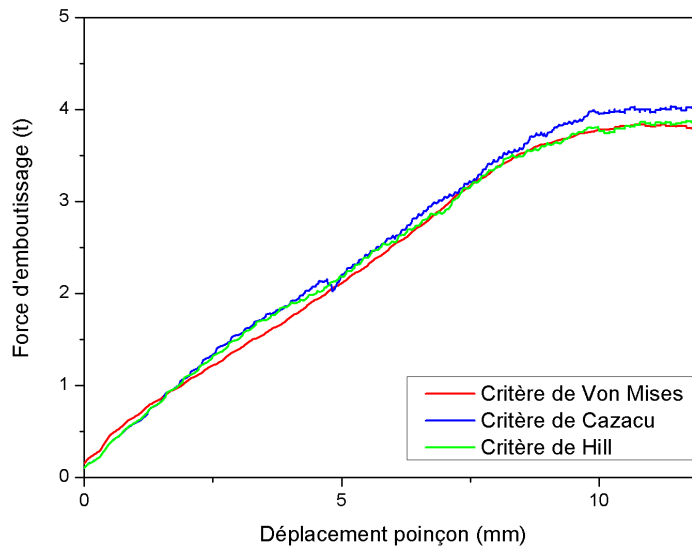


FIGURE III.13 – Comparaison des forces d'emboutissage en fonction du critère de plasticité choisi pour la mise en forme d'un godet isotrope

de plasticité différents. On observe cependant une légère déviation pour le critère de

Cazacu, qui peut s'expliquer par l'utilisation d'approximations dans l'algorithme du retour radial. D'un point de vue macroscopique, les critères de plasticité anisotrope permettent la représentation d'un comportement isotrope correct.

**ii) Déformation plastique équivalente** La déformation plastique permet de vérifier que les algorithmes d'implémentation des comportements anisotropes convergent vers la bonne solution. La figure III.14 montre la déformation plastique équivalente lors de l'emboutissage d'un godet cylindrique pour les trois critères de plasticité différents.

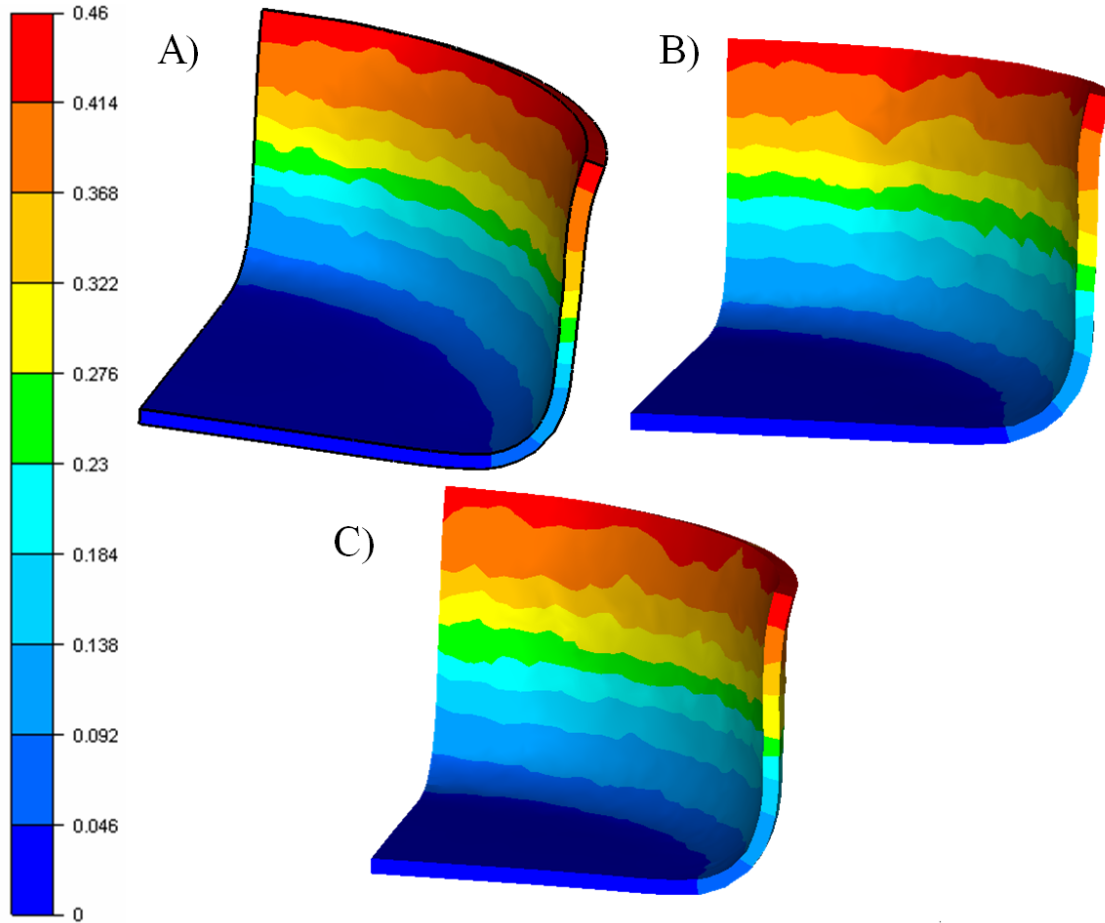


FIGURE III.14 – Déformation plastique équivalente lors de l'emboutissage d'un godet cylindrique caractérisé par un comportement isotrope : A) Critère de von Mises, B) Critère de Hill , C) Critère de Cazacu

On obtient bien les mêmes cartes de déformation pour les trois critères de plasticité, modélisant un comportement isotrope de Von Mises. Les algorithmes déterminant l'incrément de contrainte, basés sur la déformation plastique équivalente, convergent bien vers le résultat donné par la version commerciale de Forge®.

**iii) Temps de calcul** Le temps de calcul et le nombre d'itérations nécessaires pour la simulation de l'emboutissage du godet cylindrique sont indiqués dans la table III.1.

	Nombre d'itérations	Temps de calcul
Critère de Von Mises	1200	1h50mn
Critère de Hill	2580	3h46mn
Critère de Cazacu	2600	6h49mn

TABLE III.1 – Temps de calcul en fonction du critère de plasticité choisi pour simuler le formage d'un godet cylindrique modélisé par un comportement de Von Mises

Le temps de calcul est multiplié par un facteur deux lors de l'utilisation du critère anisotrope de Hill. En effet, le calcul de l'incrément de contrainte nécessite des calculs tensoriels plus complexes que pour le critère de Von Mises où la solution est quasi directe. On remarque que le critère de Cazacu demande beaucoup plus de temps de calcul, ce qui s'explique par les approximations réalisées pour le calcul de l'incrément de contrainte, et des calculs complexes pour la détermination des dérivées du critère de plasticité.

### III.6.2 Emboutissage d'une boîte carrée

La simulation de l'emboutissage d'une boîte carrée a été développée pour la conférence Numisheet'93 [Menezes00]. Ce cas test va permettre de vérifier entre autres le calcul de l'épaisseur de la tôle au cours de la mise en forme. Les paramètres pour ce test sont les suivants :

- dimension de la tôle initiale : 150x150x0.81mm
- module de Young  $E = 71000$  MPa , coefficient de Poisson  $\nu=0,33$
- comportement anisotrope de Hill :  $F=0,5932$ ,  $G=0,5848$ ,  $H=0,4152$ ,  
 $L = M = N = 1,272$
- loi d'écrouissage isotrope :  $\sigma_y = 576,79 (0,01658 + \bar{\epsilon}^p)^{0,3593}$
- coefficient de frottement pour les contacts tôle/outils : 0,162 (Loi de Coulomb)
- force appliquée sur le serre-flan : 4900 N

La figure III.15 décrit la géométrie utilisée lors de cette simulation.

L'épaisseur de la tôle au cours du procédé de formage est calculé à partir des déformations dans la direction normale à la tôle. L'orientation et l'évolution de la base locale permettent de garder le troisième axe d'anisotropie normale à la tôle. A chaque instant, la vitesse de déformation dans l'épaisseur de la tôle  $\epsilon_{mat}^{33}$  est connue. En appliquant la définition de la déformation logarithmique, on peut remonter à l'épaisseur  $h$  de la tôle



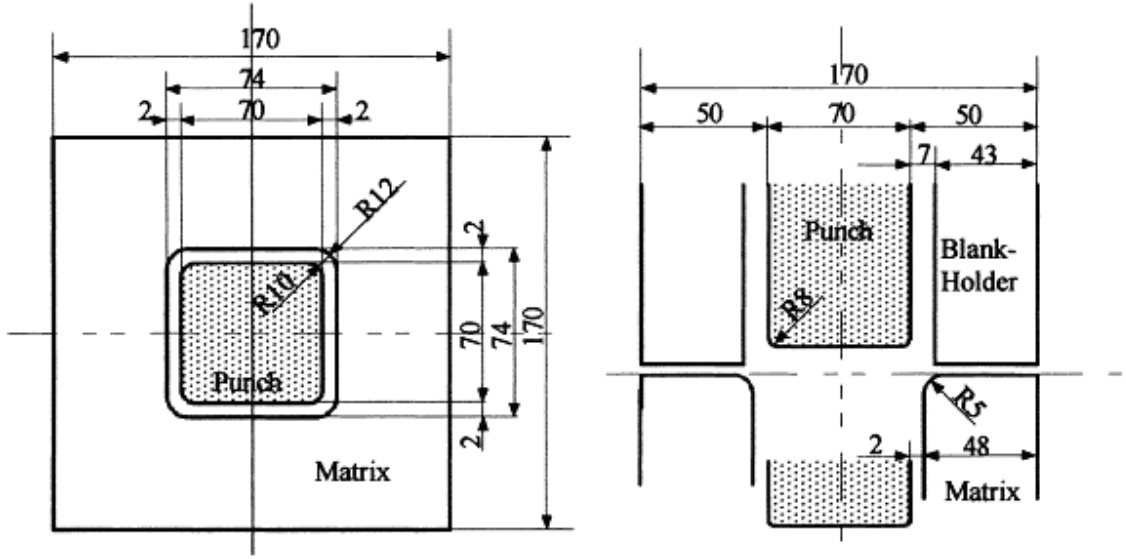


FIGURE III.15 – Géométrie du test d'emboutissage d'une boîte carré

à tous les incréments de calcul :

$$h_{n+1} = h_n \exp^{\epsilon_{mat}^{33}} \quad (\text{III.95})$$

La formulation du modèle anisotrope permet la prise en compte de l'épaisseur de la tôle au cours de la transformation d'une manière simple et fondée uniquement sur des relations mécaniques.

L'épaisseur de la tôle après 15 mm de profondeur d'emboutissage, obtenue par la simulation numérique, est comparée avec les valeurs expérimentales tirées de [Menezes00] (Fig. III.16). On remarque que les résultats numériques sont très proches des résultats expérimentaux avec une bonne modélisation de la reprise d'épaisseur aux alentours de la coordonnée  $x \simeq 35$  mm entre les deux contacts aux rayons de la matrice et du poinçon. Les épaisseurs sous le serre-flan et sous le poinçon sont bien représentées par le calcul. Les ruptures de pente sont obtenues pour des coordonnées similaires entre le numérique et l'expérimental, l'épaisseur minimale mesurée prédite est proche de celle observée expérimentalement. Si l'on compare les résultats numériques obtenus avec Forge<sup>®</sup> et ceux utilisés dans la publication [Menezes00], on remarque une meilleure représentation de l'épaisseur de la tôle entre le rayon de la matrice et le rayon du poinçon, avec notamment la modélisation des pertes et reprises d'épaisseurs. La distribution des épaisseurs lors de l'emboutissage de la boîte pour une profondeur de poinçon de 15mm est tracée sur la figure III.17.

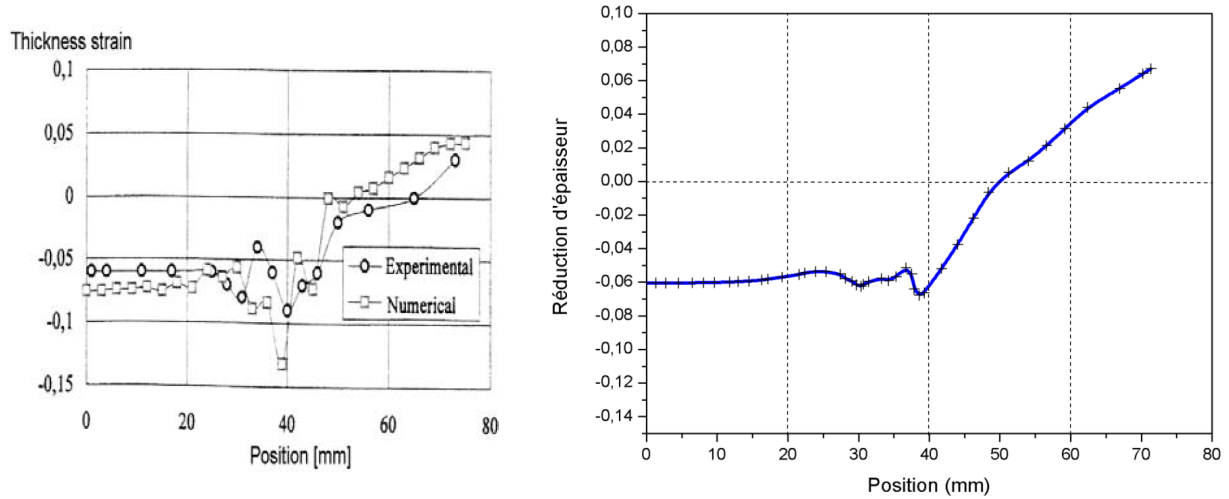


FIGURE III.16 – Réduction d'épaisseur selon la direction de laminage, données expérimentales et numériques issues de [Menezes00] (Gauche) et obtenue grâce à la simulation numérique (droite)

Un second cas test, concernant l'emboutissage d'un godet cylindrique, permet de comparer des résultats expérimentaux, tel l'avalement de la tôle et des répartitions d'épaisseur dues au caractère anisotrope du matériau.

### III.6.3 Emboutissage d'un godet cylindrique anisotrope dont l'anisotropie est modélisée par un critère de Hill

Il s'agit de comparer les résultats calculés par la formulation anisotrope lors du procédé d'emboutissage d'un godet cylindrique d'aluminium AA6111-T4 dans le cadre d'un benchmark utilisé pour la conférence Numisheet 2002 [Comsa07] [Zhiying09]. La géométrie des outils est donnée par la figure III.18 et les propriétés de la simulation sont :

- Module de Young :  $E = 70500 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,342$
- Coefficient de Lankford :  $r_0 = 0,894$ ,  $r_{45} = 0,611$ ,  $r_{90} = 0,660$
- Critère de Hill :  $F = 0,72$ ,  $G = 0,53$ ,  $H = 0,47$ ,  $L = M = N = 1,38$
- Ecrouissage isotrope :  $\sigma_y = 400,5 (0,019 + \bar{\epsilon}^p)^{0,202} \text{ (MPa)}$
- Epaisseur de la tôle :  $h = 1 \text{ mm}$
- Frottement entre la tôle et les outils :  $\mu = 0,0096$
- Force appliquée sur le serre-flan :  $10 \text{ kN}$  et  $50 \text{ kN}$

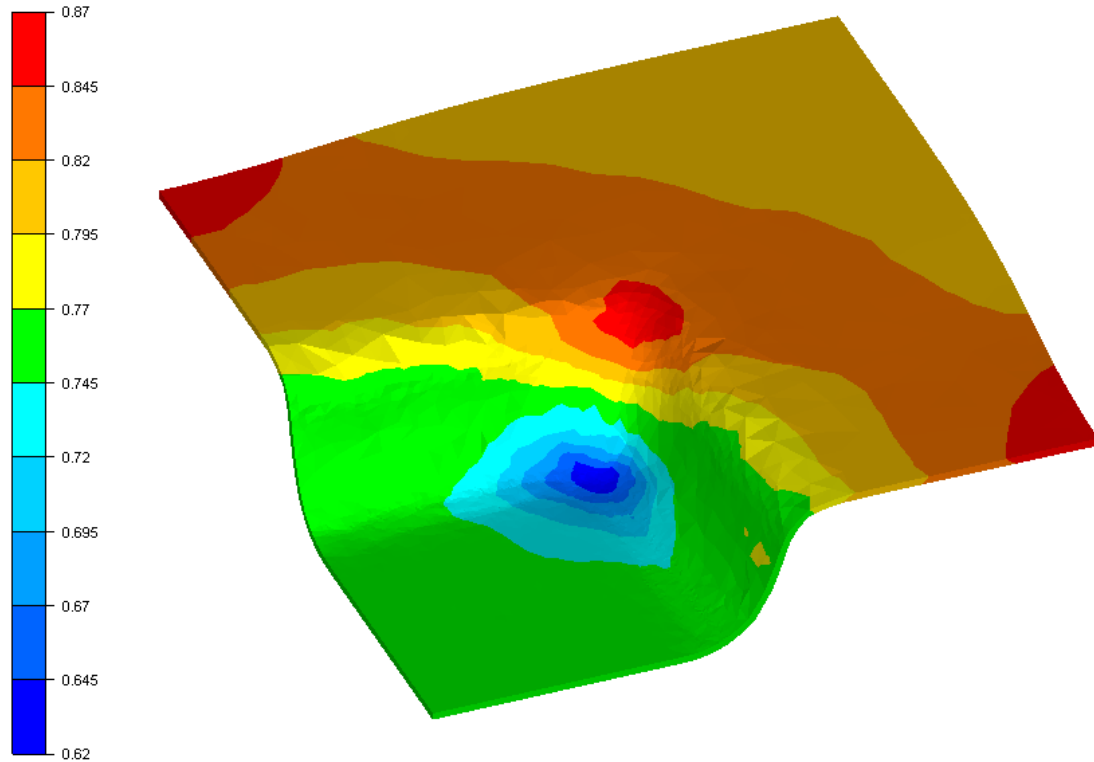


FIGURE III.17 – Distribution d'épaisseur lors de l'emboutissage d'une boîte carrée pour une profondeur de poinçon de 15mm

On s'attachera à comparer les résultats numériques obtenues avec la formulation anisotrope aux résultats expérimentaux trouvés dans cet article. Les prédictions numériques donnés dans celui-ci sont obtenues en caractérisant le matériau par un critère non quadratique de la famille des critères BBC. Dans notre cas, les paramètres d'un critère de Hill ont été identifiés à partir des coefficients de Lankford.

On considère une profondeur d'emboutissage de 40mm. Les comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques sont listées ci-dessous :

1. Courbe force d'emboutissage en fonction du déplacement du poinçon
2. Profil de la géométrie finale et notamment de l'orientation des cornes d'emboutissage et des plis sous le serre-flan (Fig. III.19)
3. Distribution d'épaisseurs suivant les directions de laminage, transverse et orientée à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage

**i) Force d'emboutissage** La force d'emboutissage est le premier élément de comparaison entre la simulation numérique pour deux forces de serre-flan différentes : 10kN et 50kN. La prédiction numérique issue du logiciel Forge<sup>®</sup>, même si elle ne colle pas exactement aux points numériques, notamment à partir d'une course du poinçon de 20mm,

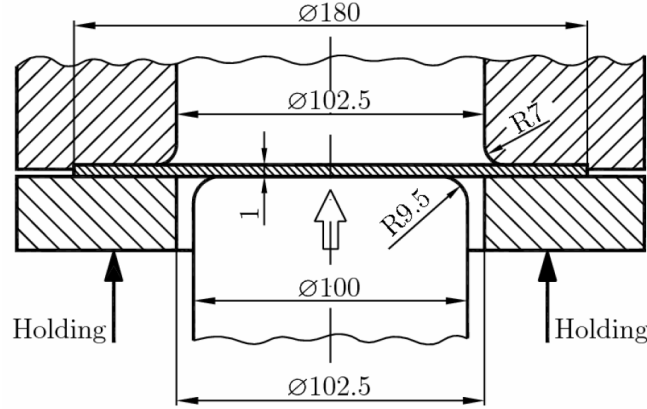


FIGURE III.18 – Géométrie du procédé d'emboutissage d'un godet cylindrique utilisé pour le benchmark Numisheet 2002 [Comsa07]

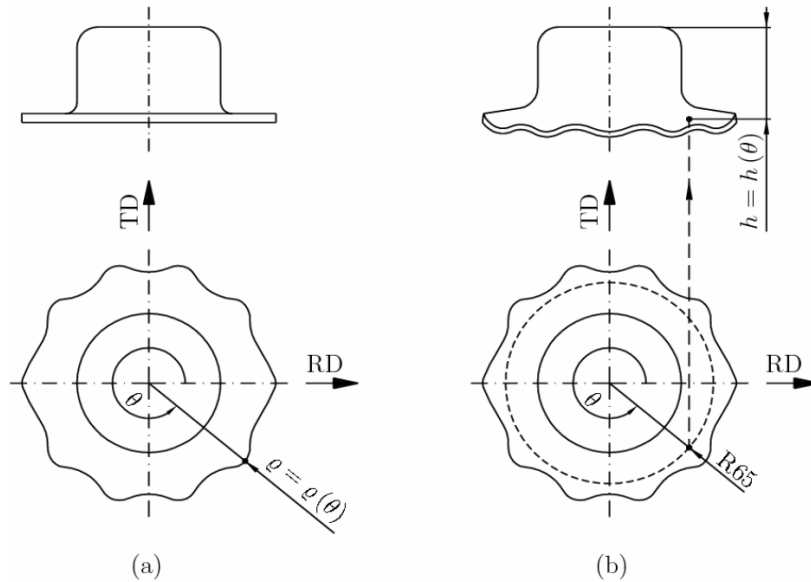


FIGURE III.19 – Benchmark Numisheet 2002 [Comsa07] : Caractéristiques du flan en fin d'emboutissage

permet d'obtenir une bonne approximation de la force d'emboutissage. La différence entrevue entre l'expérimental et les prédictions numériques du modèle peut s'expliquer par les approximations dues à la gestion du contact entre la tôle et les outils et de la pression de serre-flan. Ces deux éléments ont une grande influence sur l'effort d'emboutissage, notamment lors de la fin de course du poinçon. Le contact, dans le logiciel Forge® est géré par un algorithme de pénalisation [Mocellin99], qui peut introduire une légère erreur lors de simulation de procédés avec de grandes surfaces de contact entre la pièce et les outils comme c'est le cas en emboutissage, notamment avec l'utilisation

de maillage grossier dans la zone où le contact matrice/tôle/serre-flan est effectif. Le contrôle de l'outil flottant, permettant de modéliser l'effet de la pression sur le serre-flan introduit lui aussi des approximations dans le calcul numérique, notamment lorsque l'effort de la tôle sur ce dernier lui impose une translation. Pour une force de serre-flan de 10 kN (Fig. III.20) et de 50 kN (Fig. III.21), les calculs numériques issus de Forge<sup>®</sup> ont tendance à sous-estimer la force maximale d'emboutissage. On peut remarquer que les prédictions numériques issues de la publication [Comsa07] sont légèrement plus proches de la solution expérimentale.

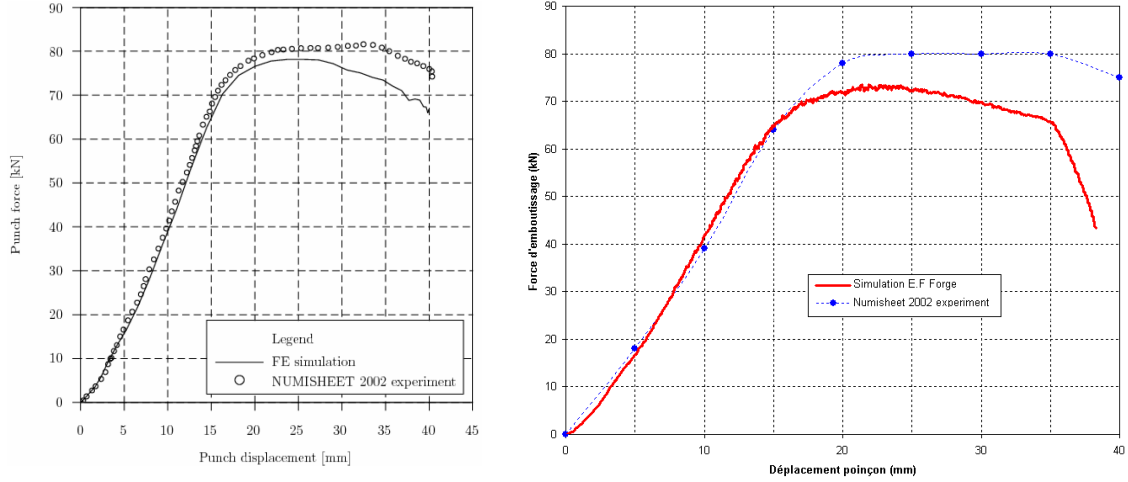


FIGURE III.20 – Evolution de la force d'emboutissage pour un force de serre-flan de 50kN : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (gauche) et numériques obtenues par Forge<sup>®</sup> (droite)

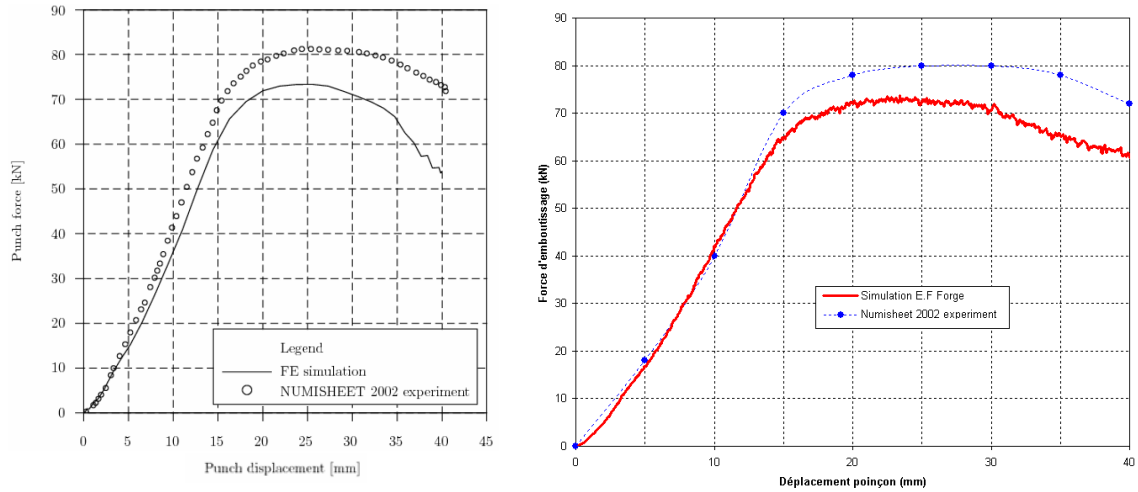


FIGURE III.21 – Evolution de la force d'emboutissage pour un force de serre-flan de 10kN : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (gauche) et numériques obtenues par Forge<sup>®</sup> (droite)

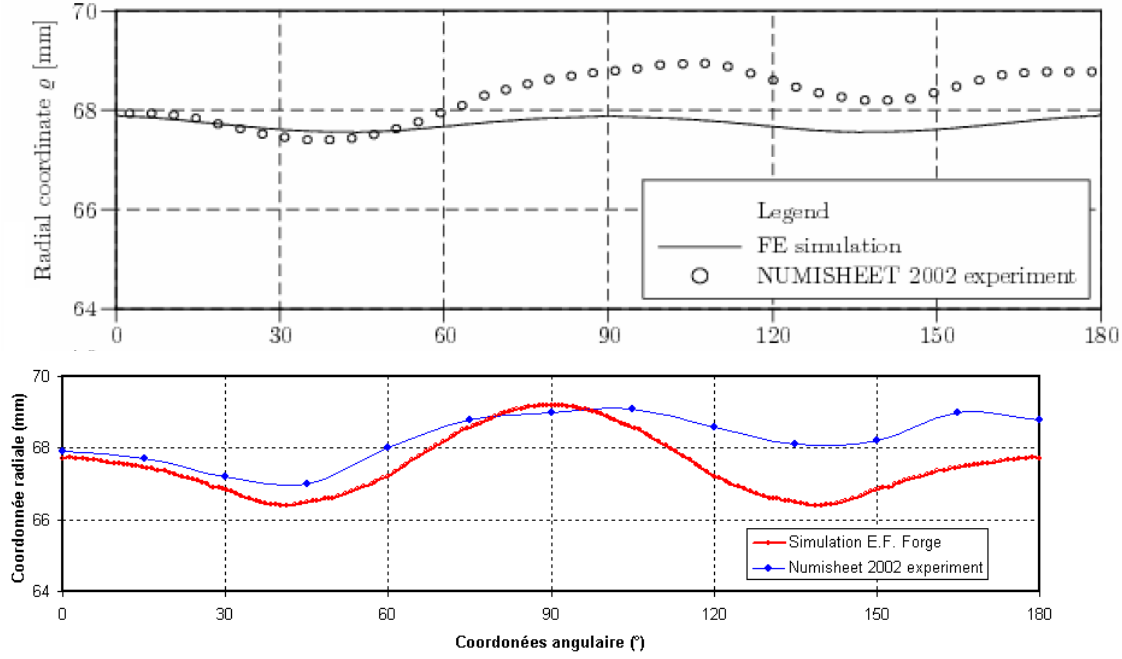


FIGURE III.22 – Profil des cornes d'emboutissage en fonction de l'angle : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (haut) et numériques obtenues par Forge® (bas)

**ii) Cornes d'emboutissage** La géométrie finale du godet cylindrique passe notamment par l'apparition de cornes d'emboutissage, dues au comportement mécanique anisotrope du matériau AA6111-T4. La figure III.22 compare les résultats de la simulation Forge® à un essai expérimental issu du benchmark Numisheet 2002. On trouve une bonne corrélation qualitative pour l'orientation des cornes d'emboutissage entre le calcul numérique et les mesures expérimentales. L'avalement expérimental est maximal pour une direction orientée à environ  $40^\circ$  et minimal pour la direction transverse. Le calcul numérique obtenu avec la formulation anisotrope développé permet de retrouver toutes ces caractéristiques géométriques. L'avalement maximal est obtenu numériquement pour une direction de  $45^\circ$ . La différence s'explique par la modélisation de la plasticité par un critère de Hill, qui ne permet pas une grande précision sur la position des cornes d'emboutissage du fait de son identification à partir de données uniquement dans la direction de laminage, la direction transverse et l'orientation à  $45^\circ$ . Le rayon final du flan pour la direction de laminage est de 67,8mm numériquement contre 67,9 mm expérimentalement, 66,5 mm contre 67 mm pour la direction  $45^\circ$  et 69,2 mm contre 69 mm dans la direction transverse. On obtient par le calcul numérique des cornes d'emboutissage légèrement plus marquées que dans la réalité. Les profils entre les coordonnées angulaires  $90^\circ$  et  $180^\circ$  sont obtenus numériquement par l'utilisation d'un plan de symétrie dans la mise en données du calcul. Les valeurs prédites sont très éloignées des relevés expérimentaux.

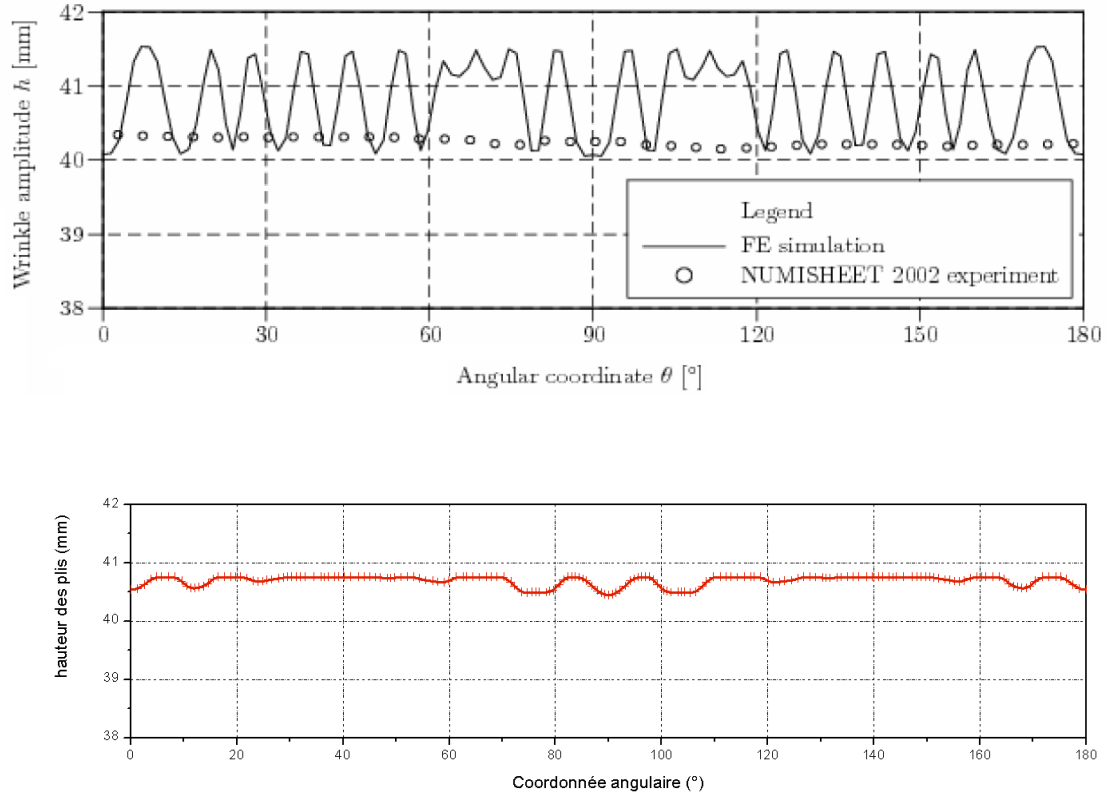


FIGURE III.23 – Profil des plis en fonction de l’angle : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (haut) et numériques obtenues par Forge® (bas)

**iii) Plis de la tôle apparaissant sous le serre-flan** On remarque de légers plis apparaissant sur la tôle sous le serre-flan. La comparaison entre l’expérimental et le numérique est montrée figure III.23. On observe numériquement de très légers plis, que ne se retrouve pas sur les relevés expérimentaux.

**iv) Distribution d’épaisseurs finales** Les distributions d’épaisseur en fonction de la position initiale sont tracées suivant la direction de laminage (Fig. III.24), suivant l’orientation  $45^\circ$  (Fig. III.25 et III.26) et suivant la direction transverse (Fig. III.24). On remarque à chaque fois la reprise d’épaisseur observée entre le rayon de la matrice et le rayon du poinçon. Le calcul numérique a cependant tendance à minimiser légèrement l’épaisseur sous le poinçon et à cause de la conservation de la masse, donc du volume, à augmenter l’épaisseur sous le serre flan. On retrouve cependant une évolution correcte de la distribution d’épaisseur, et notamment l’évolution suivant la direction choisie. L’épaisseur est maximale pour une orientation à  $45^\circ$  de la direction de laminage et minimale pour la direction transverse. On peut donc faire le rapprochement

entre l'épaisseur sous le serre-flan et l'avalement de la tôle, représentatif de l'orientation des cornes d'emboutissage. Plus cet avalement est important, plus l'épaisseur sous le serre-flan est importante.

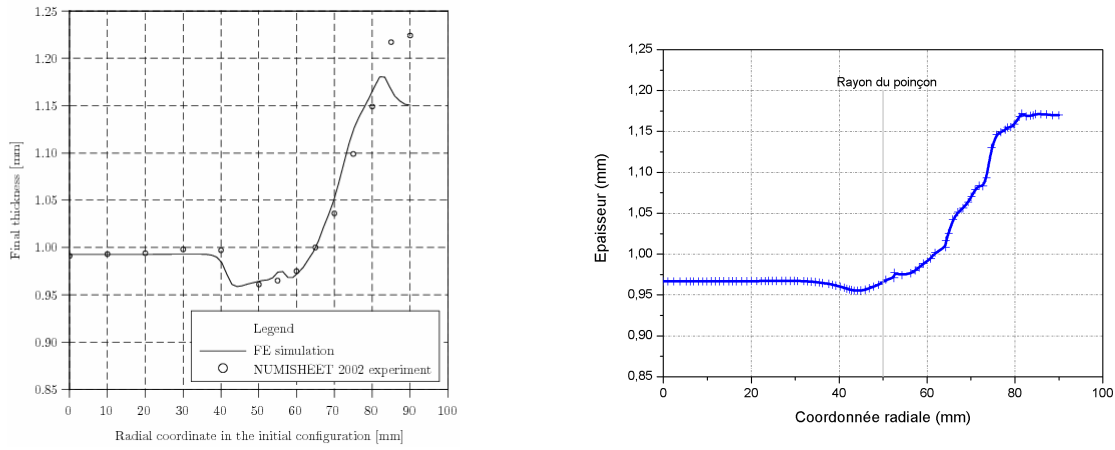


FIGURE III.24 – Distribution d'épaisseur suivant la direction de laminage en fonction de la position initiale : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (gauche) et numériques obtenues par Forge® (droite)

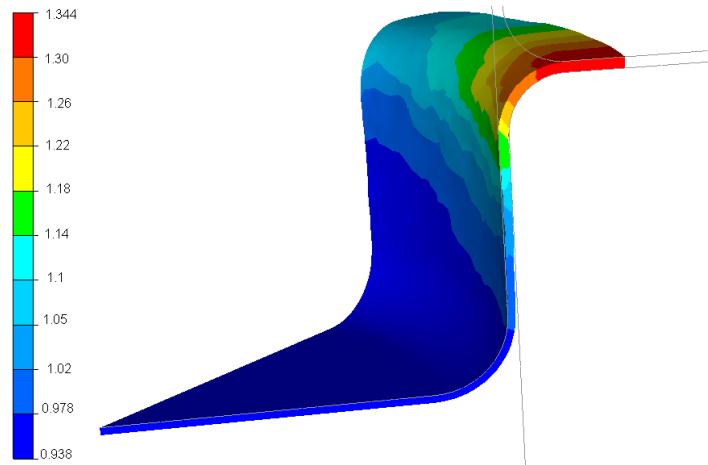


FIGURE III.25 – Distribution d'épaisseur dans le plan de coupe orienté à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage pour l'emboutissage d'un godet cylindrique



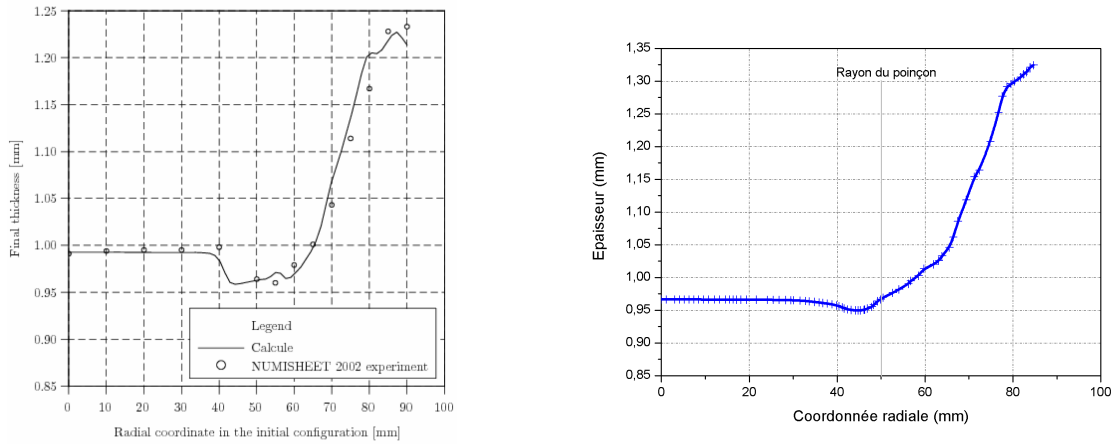


FIGURE III.26 – Distribution d'épaisseur suivant l'orientation  $45^\circ$  en fonction de la position initiale : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (gauche) et numériques obtenues par Forge<sup>®</sup> (droite)

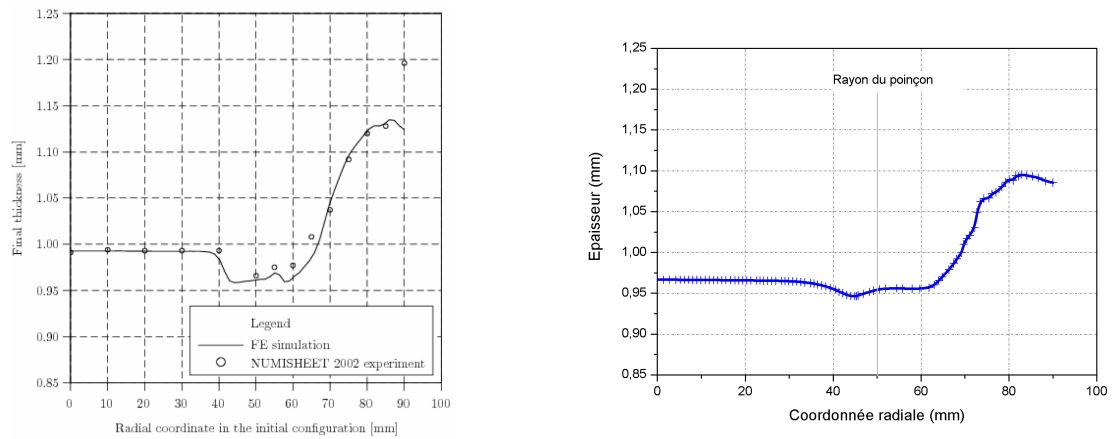


FIGURE III.27 – Distribution d'épaisseur suivant la direction transverse en fonction de la position initiale : Comparaison entre les données expérimentales et numériques issues de [Comsa07] (gauche) et numériques obtenues par Forge<sup>®</sup> (droite)

### III.6.4 Emboutissage retour d'un godet cylindrique

La simulation du procédé d'emboutissage retour d'un godet cylindrique [Thuillier10] est le dernier benchmark lancé pour la validation de l'implémentation de la formulation anisotrope. La première passe est réalisée avec le poinçon du plus grand diamètre, pour permettre la réalisation d'un premier godet. Ensuite, le fond du godet est de nouveau déformé par un poinçon de plus petit diamètre permettant d'obtenir des déformations plus importante que celles possibles lors d'un emboutissage à une seule passe. Il s'agit de tester ainsi l'implémentation de l'écrouissage cinématique associé à un critère de plasticité anisotrope. La géométrie des outils est décrite par la figure III.28.

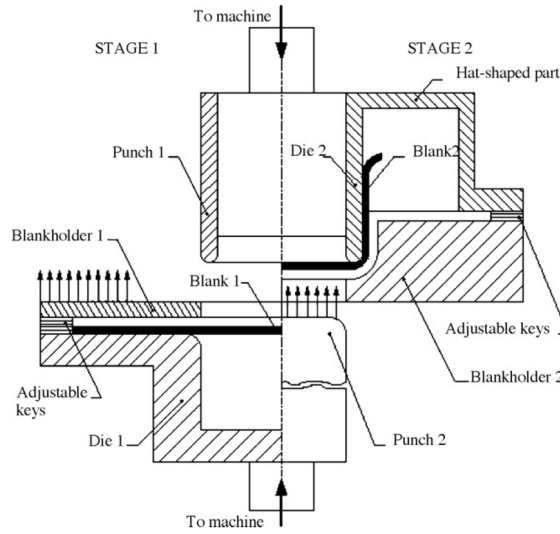


FIGURE III.28 – Géométrie des outils permettant l'emboutissage retour d'un godet cylindrique

Les données de la simulation ont été adaptées pour pouvoir se conformer au modèle anisotrope choisi, notamment en terme d'écrouissage cinématique, où la loi de comportement utilisée est différente :

- Module de Young :  $E = 210\,000\text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$
- Coefficient de Lankford :  $r_0 = 1,73$ ,  $r_{45} = 1,23$ ,  $r_{90} = 2,02$
- Critère de Hill :  $F = 0,313$ ,  $G = 0,366$ ,  $H = 0,634$ ,  $L = M = N = 1,17$
- Ecrouissage isotrope :  $\sigma_y = 500(0,0478 + \bar{\epsilon}^p)^{0,2}$  (MPa)
- Ecrouissage cinématique :  $[\dot{\mathbf{X}}] = 150,4[\dot{\epsilon}^p] - [\mathbf{X}]\dot{\epsilon}^p$
- Epaisseur de la tôle :  $h = 0,98\text{ mm}$
- Frottement glissant entre la tôle et les outils
- Diamètre du premier poinçon :  $\Phi = 100\text{ mm}$
- Diamètre du second poinçon :  $\Phi = 73,4\text{ mm}$

Les champs de déformations plastiques sont tracés à la fin de la première passe (Fig. III.29) et du procédés (Fig. III.30). On observe les mêmes tendances, avec notamment une même orientation des cornes d'emboutissage et de champ de déformation plastique.

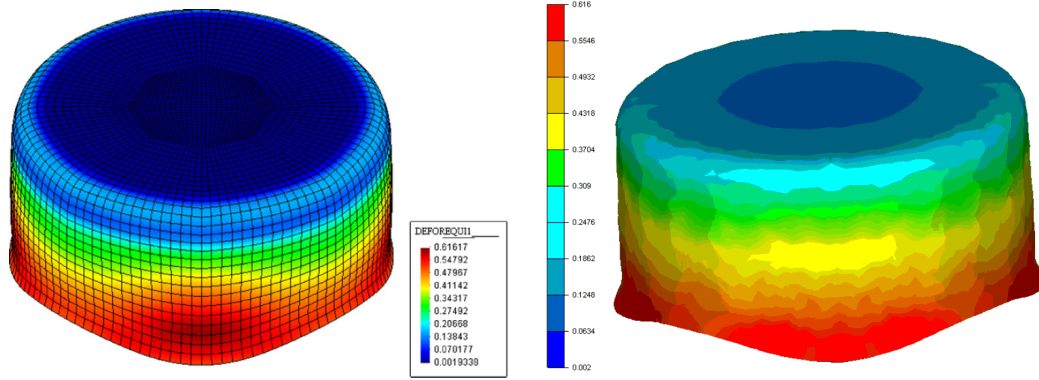


FIGURE III.29 – Déformation plastique à la fin de la première passe : Comparaison entre les résultats numérique issus de [Thuillier10] et de Forge® (à droite)

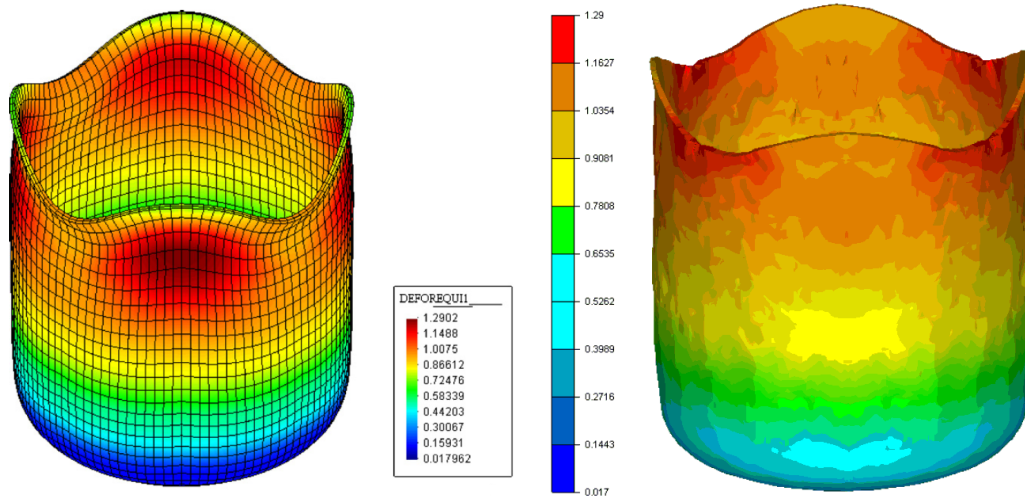


FIGURE III.30 – Déformation plastique à la fin de la seconde passe : Comparaison entre les résultats numérique issus de [Thuillier10] et de Forge® (à droite)

La figure III.31 compare les forces obtenues par la simulation numérique et les forces déterminées par lors de la réalisation de l'essai expérimental [Thuillier10]. On observe bien le décalage entre la passe 1 et la passe 2, et donc l'effet de l'érouissage cinématique. Cependant, la simulation numérique prédit des forces légèrement supérieures à celles observées expérimentalement. Cet écart peut provenir des approximations faites sur la modélisation de l'érouissage cinématique. Mais on peut cependant en conclure que la formulation anisotrope donne une bonne prédiction numérique sur les grandeurs mises en jeu lors d'un procédé de mise en forme.

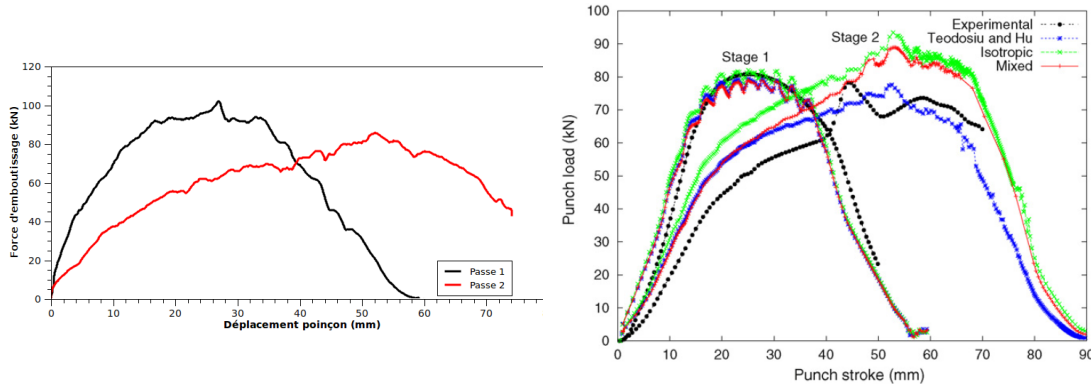


FIGURE III.31 – Force d’emboutissage pour les deux passes de l’emboutissage : issues de la simulation (à gauche) et [Thuillier10] (à droite)

### III.7 Conclusion du chapitre

La formulation anisotrope définie dans les précédents chapitres a été implémentée dans un logiciel éléments finis Forge<sup>®</sup>, dans lequel les équations d’équilibre sont résolues selon un schéma implicite par une formulation mixte vitesse pression. Un terme bulle enrichit la partie linéaire de la vitesse pour éviter les phénomènes de verouillage. L’implémentation d’un comportement implique le calcul de l’incrément de contrainte et des modules tangents linéaire et bulle. Les expressions de ces derniers nécessitent le calcul des dérivées première et seconde du critère de plasticité. L’intégration du critère anisotrope de Hill est réalisée par l’algorithme du retour radial, les dérivées de celui-ci étant facilement calculable. En revanche le critère non quadratique de Cazacu ne permet de calculer directement les dérivées. Des développements limités de premier ordre permettent de passer outre ce problème et d’obtenir la convergence de l’algorithme du retour radial. Concernant le calcul de l’incrément de contrainte, toujours effectué dans le repère local, sa précision diffère selon le critère choisi. Avec le critère de Hill, le critère de convergence est beaucoup plus faible qu’avec le critère de Cazacu. De nombreux outils ont été implémentés dans le logiciel, et notamment une loi d’écrouissage isotrope dépendante de la direction de sollicitation. De nombreux cas tests, utilisés lors de conférences et dans la littérature, permettent la validation de l’implémentation de la formulation anisotrope. On peut cependant noter que la validation du critère de Cazacu se base pour l’instant uniquement sur la simulation d’un comportement isotrope de von Mises, aucun autre élément de comparaison n’ayant été trouvé permettant une identification rapide du critère de plasticité de Cazacu. L’implémentation de la formulation anisotrope permet maintenant la simulation de la mise en forme des alliages de titane. Avant cela, l’identification des paramètres nécessaires à la bonne modélisation du comportement anisotrope demande une certaine réflexion.



# Chapitre IV

## Identification des paramètres du modèle anisotrope

La formulation anisotrope implémentée dans le logiciel éléments finis nécessite une procédure d'identification permettant la définition correcte des différentes lois de comportement constituant le modèle anisotrope. En effet, on dénombre une dizaine de données du matériau à déterminer pour permettre une bonne modélisation. Des essais expérimentaux à sollicitation simple réalisés par les différents partenaires du projet permettent la constitution d'une base de données expérimentales. La précision et l'efficacité des critères de plasticité, identifiés à partir de cette base, pourront être comparées. Au cours de ce chapitre, les critères de plasticité ainsi que les lois d'écrouissage isotrope et cinématique seront identifiés avec des méthodes différentes selon le but à atteindre. Des simulations numériques, notamment des essais de traction et de cisaillement simple, permettront de tirer les premières conclusions sur l'efficacité de l'identification des différents modèles.

### IV.1 Essais expérimentaux à sollicitation simple

La base de données expérimentales permettant l'identification des paramètres du matériau est constituée par des essais à sollicitation simple, tels la traction uniaxiale, le cisaillement simple et la compression uniaxiale. Cette base a été constituée par les différents partenaires du projet, et notamment le LPMTM de l'Université Paris XIII (table [IV.1](#)).

Type d'essais	Laboratoire	Grandeur
Traction uniaxiale	CEMEF	Limites d'élasticité et Coefficients de Lankord
Traction uniaxiale	LPMTM	Limites d'élasticité et Coefficients de Lankord
Cisaillement simple	LPMTM	Limites d'élasticité
Cisaillement cyclique	LPMTM	Effet Bauschinger
Compression simple	LPMTM	Limites d'élasticité

TABLE IV.1 – Base expérimentale disponible pour l'identification des modèles

### IV.1.1 Essais de traction uniaxiale

Des essais de traction uniaxiale dans cinq directions différentes pour deux vitesses de traverse ont été réalisés au CEMEF. La géométrie de l'éprouvette de traction est définie par la figure IV.1, les dimensions de la zone utile étant de 50 mm de longueur par 12 mm de largeur.

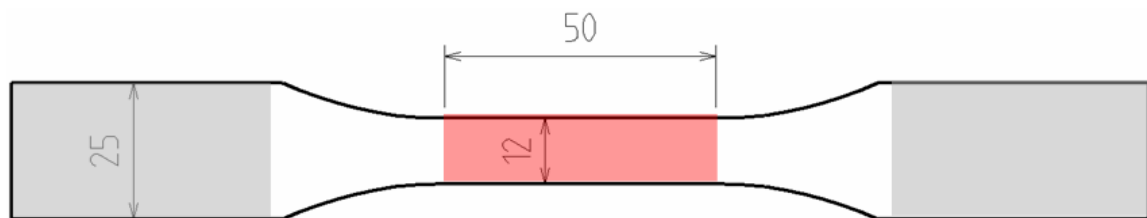


FIGURE IV.1 – Géométrie de l'éprouvette de traction uniaxiale, prise dans les mors en gris et zone utile en rouge

Cinq directions de sollicitation, orientées d'un angle  $\alpha$  par rapport à la direction de laminage, sont exploitées afin de déterminer les propriétés de l'alliage de titane (Fig. IV.2). Ces dernières sont la direction de laminage, la direction transverse et les orientations  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .

Les tests de tractions permettent de déterminer :

- les limites élastiques et l'écrouissage plastique en fonction de l'orientation de la sollicitation
- l'anisotropie du matériau, avec notamment la détermination des coefficients de Lankford

Les tests de tractions sont réalisés sur des machines de traction, avec une capacité adaptée au matériau, c'est-à-dire une force maximale de 10kN pour le titane commercialement pur T40 et de 200kN pour le SSAT 350. Le capteur de force est calibré afin d'obtenir une précision optimale. Deux vitesses de traverse,  $v=0,08$  mm/s et  $v=0,8$ mm/s, permettent d'étudier la sensibilité à la vitesse.

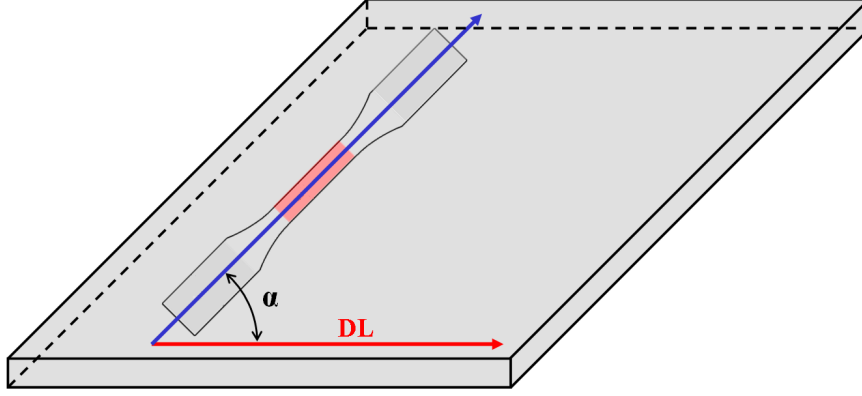


FIGURE IV.2 – Découpe des éprouvettes de traction orientées par rapport à la direction de laminage dans la tôle

Deux méthodes de dépouillement de courbe sont utilisées, la méthode dite logarithmique qui prend en compte l'évolution de la section et la méthode ingénieur qui considère cette dernière constante. Les grandeurs "ingénieur" sont définies en fonction de la longueur initiale de l'éprouvette  $L_0$ , la longueur  $L$ , la section initiale  $S_0$ , par :

$$\epsilon_{ing} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \sigma_{ing} = \frac{F}{S_0} \quad (IV.1)$$

La déformation logarithmique est définie par :

$$\epsilon_{log} = \ln \left( \frac{L}{L_0} \right) \quad (IV.2)$$

Le calcul de la contrainte prend en compte la variation de la section  $S$  et est déterminée par :

$$S = \frac{S_0}{L/L_0} \quad \sigma = \frac{F}{S} \quad (IV.3)$$

Dans la suite, seules les grandeurs logarithmiques seront utilisées, les grandeurs "ingénieur" permettant seulement la comparaison des limites de plasticité avec les données du fournisseur des alliages du titane. Concernant les modules de Young et les coefficients de Poisson, on utilise les données de la littérature, c'est-à-dire  $E=110\,000$  MPa et  $\nu = 0,3$ .

#### IV.1.1.a Alliage de titane commercialement pur : T40

**i) Courbe contrainte/déformation** Les courbes suivantes (Fig. IV.3) sont obtenues avec une vitesse de traverse de 0,08mm/s et montrent bien le caractère anisotrope de



l'alliage de titane T40. On peut remarquer que la limite élastique est maximale dans la direction transverse, tandis que la contrainte à la rupture est la plus élevée selon la direction de laminage. Les autres essais (Fig. IV.4) ont été réalisés avec une vitesse de traverse de 0,8 mm/s. On observe que la vitesse ne modifie pas le comportement anisotrope, on a toujours en limite d'élasticité l'ordre suivant, de la plus élevée à la plus faible : DT (90°), 60°, 45°, 30° et DL (0°).

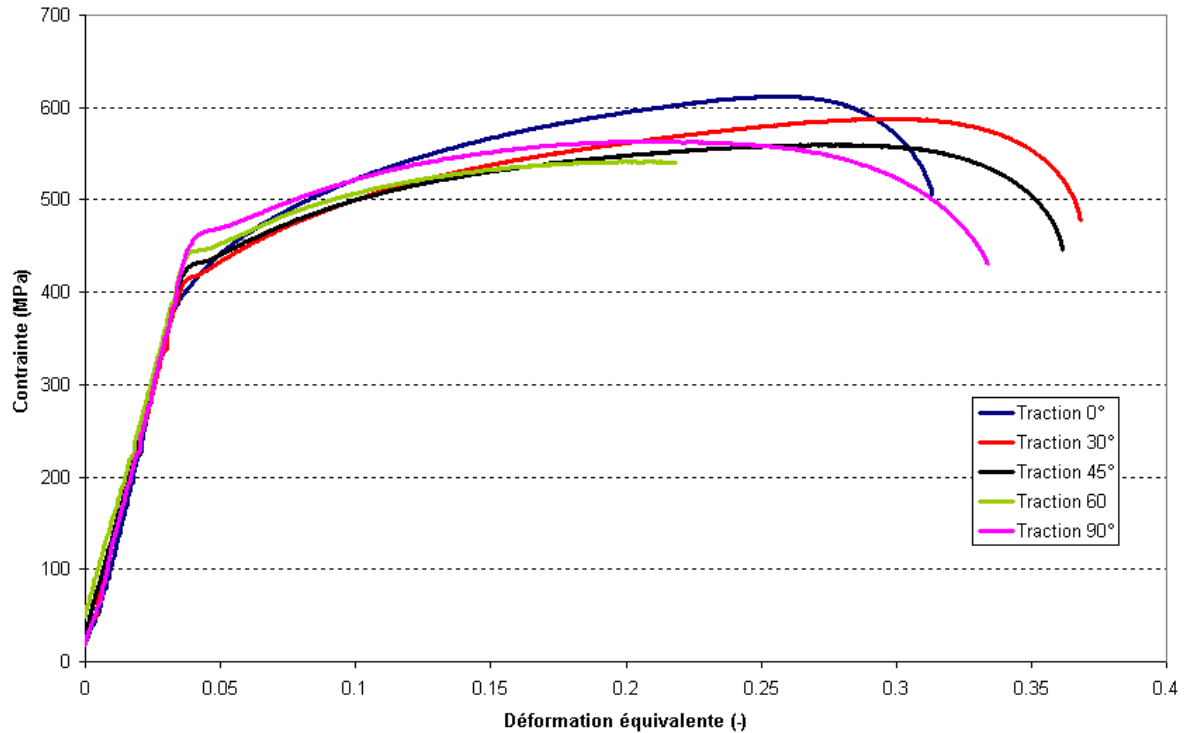


FIGURE IV.3 – Courbe contrainte/déformation pour l'alliage de titane T40, vitesse de traverse de 0,08mm/s

**emphii) Limite d'élasticité et contrainte à la rupture** Le tableau IV.2 réunit toutes les données connues sur l'alliage de titane T40 pour les différents partenaires (EADS, LPMTM,...). Les valeurs obtenues à partir de mêmes essais sont semblables pour les différents laboratoires, ce qui permet la validation des grandeurs mesurées au CEMEF sur les tests de traction.

**emphiii) Mesure des coefficients de Lankford par mesure de champs** Le coefficient de Lankford permet de mesurer l'anisotropie plastique en déformation des tôles laminées. Il correspond au rapport de la déformation plastique dans la largeur de l'éprouvette sur celle dans l'épaisseur. En intégrant l'incompressibilité plastique, on

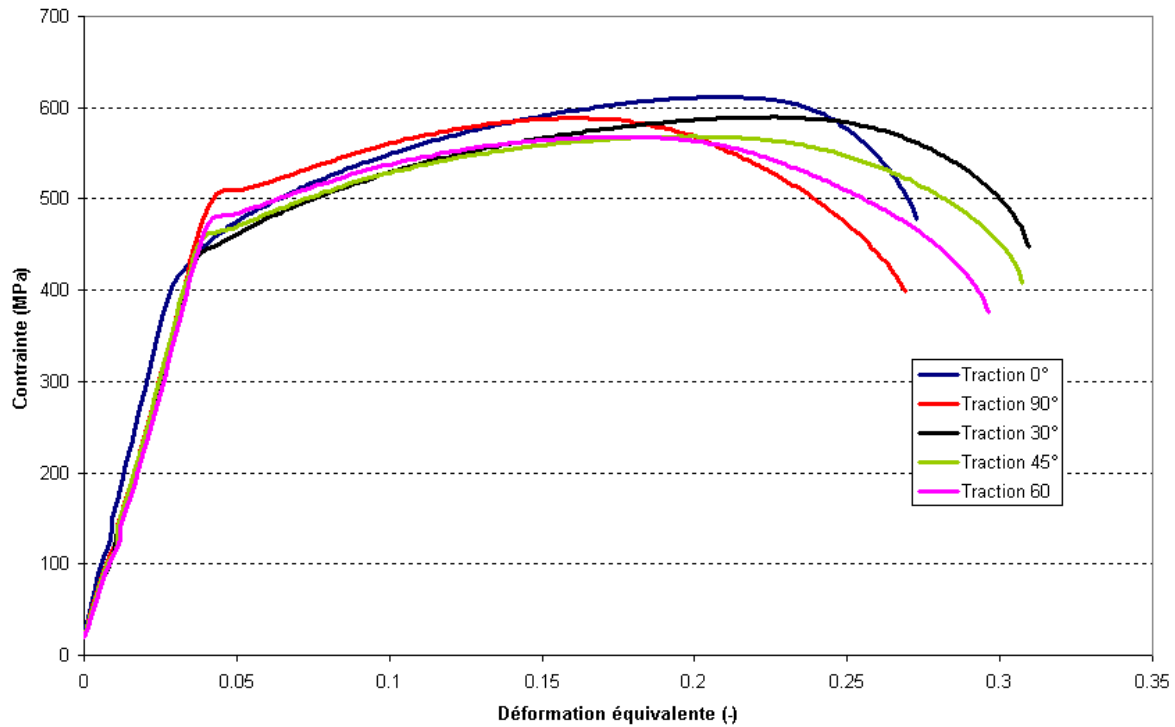


FIGURE IV.4 – Courbe contrainte/déformation pour l'alliage de titane T40, vitesse de traverse de 0,8mm/s

	CEMEF				LPTM	SOUS TRAITANT	FOURNISSEUR
	v=0.08 mm/s	v=0.08 mm/s	v=0.8 mm/s	v=0.8 mm/s	v= 0.08 mm/s		
Direction	Vraie	Ingénieur	Vraie	Ingénieur	Vraie	Ingénieur	Ingénieur
<b>LIMITES D'ELASTICITE (MPa)</b>							
0	395	383	410	401	390		351
30	410	399	430	421			
45	423	412	458	440	420		
60	440	428	470	459			
90	455	432	500	472	460		379
<b>LIMITES A LA RUPTURE (MPa)</b>							
0	590	489	596	511		493	496
30	544	463	555	489			
45	523	457	539	479			
60	513	462	542	491			
90	533	475	563	508		485	478

TABLE IV.2 – Tableau récapitulatif des données sur l'alliage de titane T40

peut exprimer les coefficients de Lankford en fonction des déformations dans la largeur  $\epsilon_{\text{psilon}_l}$  et la longueur de l'éprouvette  $\epsilon_L$  (Fig. IV.5) :

$$r = \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{ep}} = - \frac{\epsilon_l}{\epsilon_L + \epsilon_l} \quad (\text{IV.4})$$

La détermination des coefficients de Lankford, par la mesure de la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette déformée, n'est pas fiable au vu de la précision des outils de mesure

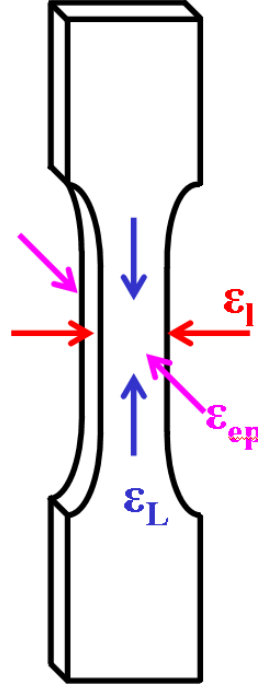


FIGURE IV.5 – Mesure des coefficients de Lankford

disponibles. Pour augmenter la précision et la reproductibilité de ces mesures, une analyse des cartographies de champ de déformations, obtenues par corrélation d'images grâce au logiciel Aramis (Annexe B) est mise en place. A partir des deux photos de l'éprouvette à l'état initial et final, on obtient les déformations principales et les déformations plastiques équivalentes (Fig. IV.6).

On peut donc tracer le coefficient de Lankford en fonction de la déformation plastique, comme le montre la figure IV.7. On utilise les données pour une déformation plastique supérieure à 0,15, zone dans laquelle la valeur du coefficient est stabilisée. Cette méthode permet de déterminer une valeur du coefficient en fonction de l'orientation et un écart type pour celle-ci.

Les coefficients de Lankford, déterminés à partir des essais de traction, sont récapitulés dans la table IV.3, ainsi que ceux obtenus par le LPMTM [Mhenni]. Ces derniers ont été obtenus par la méthode des grilles. Un marquage régulier composé de quadrangle est déposé sur l'éprouvette. L'exploitation de l'évolution de cette grille permet la détermination des coefficients de Lankford. Le graphe IV.8 trace les coefficients de Lankford en fonction de l'angle de sollicitation par rapport à la direction de laminage.

La comparaison de l'évolution du coefficient de Lankford en fonction de la direction de laminage montre des différences entre les valeurs déterminés au CEMEF et au

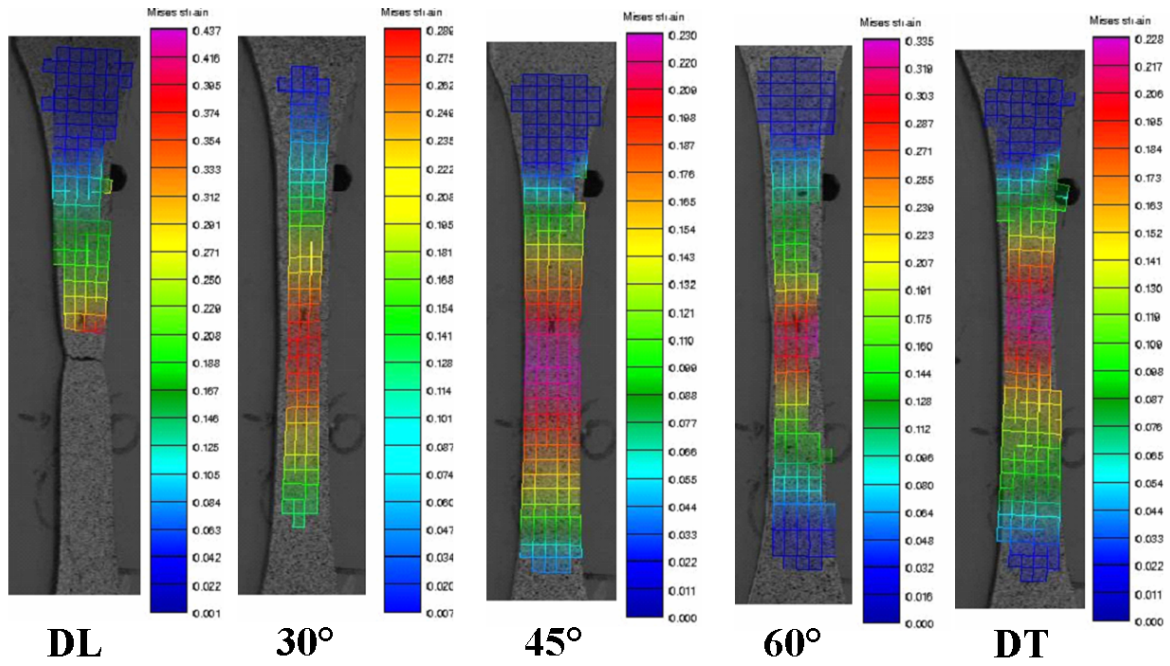


FIGURE IV.6 – Mesure des déformations par corrélation d'image avec le logiciel Aramis : éprouvettes de traction uniaxiale de T40 (Essais réalisés au CEMEF)

Direction	Cemef	LPMTM
0	$2,34 \pm 0,06$	2,17
15		2,46
30	$2,61 \pm 0,11$	3,32
45	$4,52 \pm 0,51$	4,56
60	$4,41 \pm 0,36$	4,1
75		5,25
90	$4,86 \pm 0,26$	5,19

TABLE IV.3 – Coefficients de Lankford pour l'alliage T40

LPMTM. La géométrie des éprouvettes et la méthode de détermination des coefficients de Lankford peuvent expliquer ces différences.

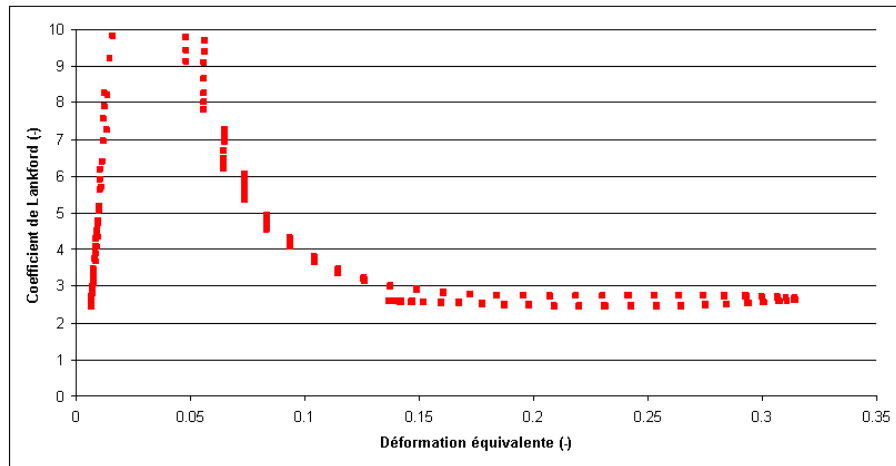


FIGURE IV.7 – Coefficient de Lankford en fonction de la déformation plastique équivalente pour une éprouvette de traction de T40 orientée à  $30^\circ$

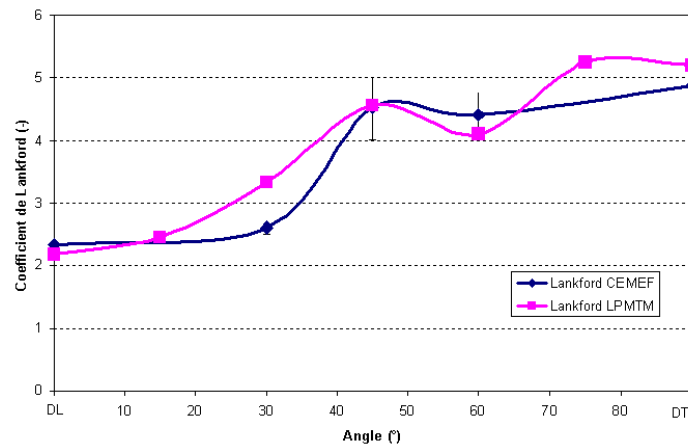


FIGURE IV.8 – Evolution du coefficient de Lankford en fonction de la direction de sollicitation pour l'alliage T40

## IV.1.1.b Alliage de titane SSAT350

**emphi) Courbe contrainte/déformation** Les essais de traction pour le SSAT350 ont été réalisés pour une seule vitesse de traverse de 0,08mm/s pour permettre une comparaison avec l'alliage T40. A la vue des courbes contrainte/déformation, on remarque que ce matériau admet des charges plus élevées que le précédent. La contrainte à la rupture peut atteindre 1000 MPa contre 600 MPa pour le T40.

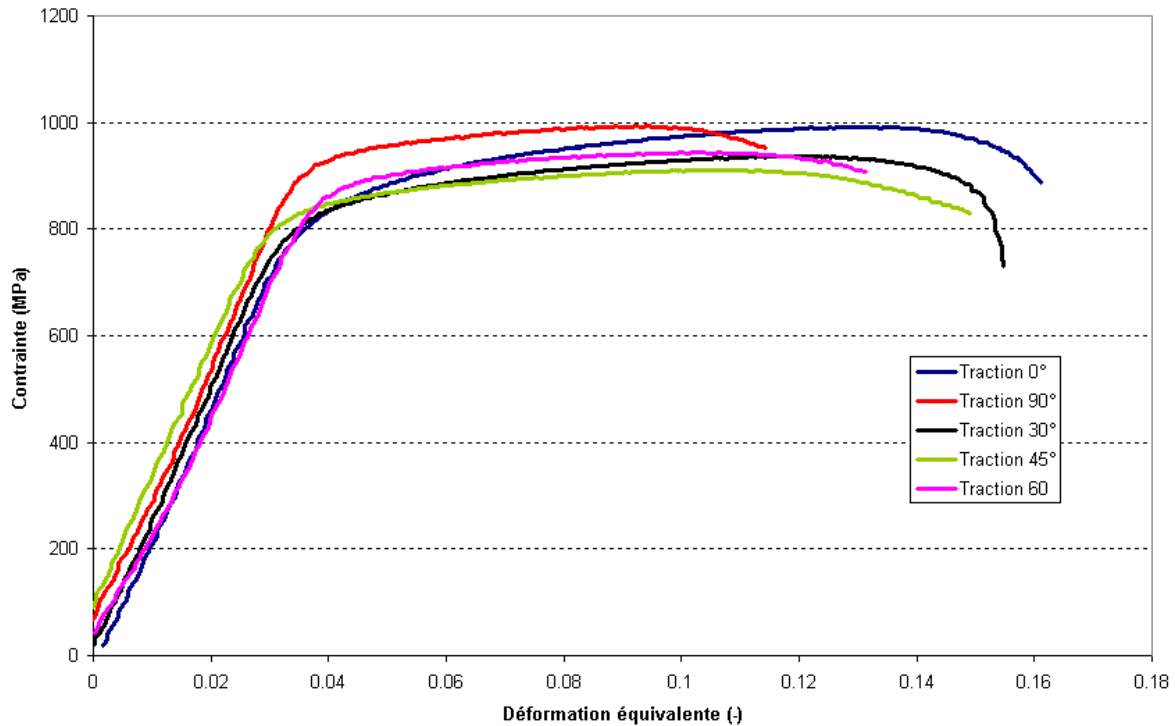


FIGURE IV.9 – Courbe contrainte/déformation pour l'alliage de Titane SSAT350, vitesse de traverse de 0,08mm/s

**emphii) Limite d'élasticité et contrainte à la rupture** A partir des courbes tracées sur la figure IV.9, on peut donc déterminer les limites élastiques et les contraintes à la rupture suivant les différentes directions de sollicitations. La table IV.4 récapitule les valeurs en fonction de la direction de sollicitation.

Dans ce second alliage de titane, on observe la même propriété que pour l'alliage commercialement pur T40, c'est à dire que la limite d'écoulement élastique est la plus faible dans la direction de laminage et la plus élevée dans la direction transverse. De plus, la contrainte à la rupture est maximale dans la direction de laminage.

Direction	Limites élastique (MPa)	Contrainte à la rupture (MPa)
0	753	1000
30	762	935
45	767	915
60	827	945
90	875	995

TABLE IV.4 – Limites élastiques et contraintes à la rupture pour l’alliage SSAT 350

**emphiii) Mesure des coefficients de Lankford par mesure de champs** Les coefficients de Lankford sont déterminés par la méthode de corrélation d’images. Les champs de déformation plastique sont représentés par la figure IV.10.

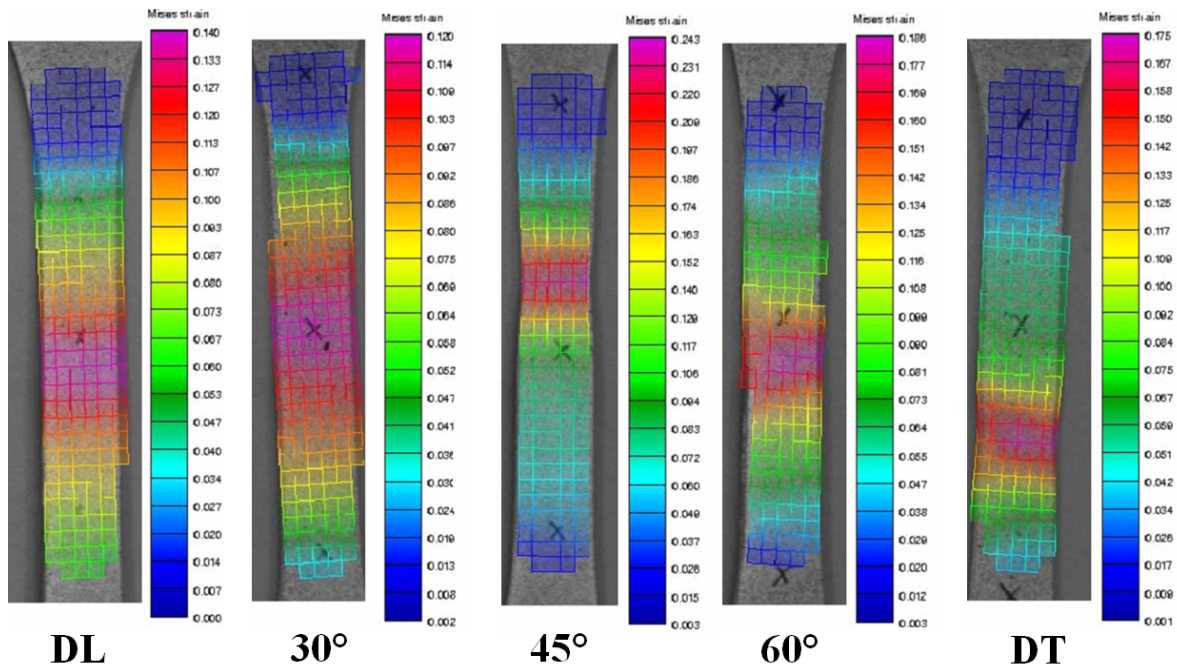


FIGURE IV.10 – Mesure des déformations par corrélation d’images avec le logiciel Aramis : éprouvette de traction uniaxiale de SSAT 350

On obtient donc les coefficients de Lankford dans les cinq directions choisies, récapitulés dans la table IV.5, et tracés sur la figure IV.11.

A ce stade, une brève étude des deux alliages de titane permet de comparer leur propriétés mécaniques et notamment le caractère anisotrope de chacun d’entre eux. L’anisotropie d’un matériau peut être exprimée suivant deux grandeurs différentes : une anisotropie en déformation symbolisée par les coefficients de Lankford et une anisotropie en contrainte définie par les limites élastiques. Dans la suite de ce manuscrit, ces deux anisotropies différentes seront modélisées par les critères de plasticité définis

Direction	Coefficient de Lankford
0	$0,73 \pm 0,26$
30	$1,36 \pm 0,26$
45	$1,53 \pm 0,35$
60	$2,06 \pm 0,45$
90	$1,62 \pm 0,47$

TABLE IV.5 – Coefficients de Lankford pour l’alliage SSAT 350

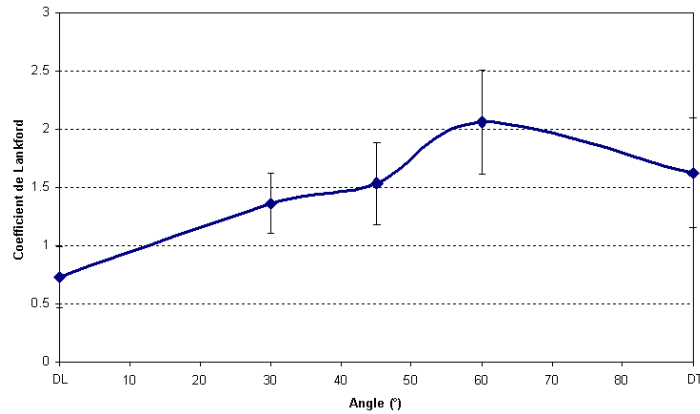


FIGURE IV.11 – Coefficient de Lankford en fonction de la direction de sollicitation pour l’alliage SSAT350

précédemment. D’un point de vue purement mécanique, l’alliage SSAT 350 est beaucoup plus résistant que l’alliage T40 (aux alentours de 400 MPa contre 900MPa pour la limite élastique), mais la ductilité est beaucoup plus faible pour le SSAT 350 (une déformation plastique maximale de 0,12 contre 0,25 pour l’alliage commercialement pur). De plus, l’alliage biphasique SSAT350 admet une ductilité très différente selon l’orientation de la sollicitation. L’anisotropie est beaucoup plus marquée pour l’alliage T40, avec notamment un coefficient de Lankford approchant 5.

Une comparaison des profils de rupture des éprouvettes de traction permet d’observer l’apparition d’une striction importante dans le cadre de l’alliage T40, contre une striction quasi-inexistante pour l’alliage SSAT350. Lors d’un test de traction du SSAT 350, on observe quasiment une rupture fragile.

### IV.1.2 Test de cisaillement simple

Une étude expérimentale du comportement de l’alliage de titane T40 (Fig. IV.12) a été effectuée dans le cadre du projet par le LPMTM [Mhenni]. Les résultats de cette



campagne de test sont récapitulés dans la table IV.6.

Direction	Limites élastique (MPa)
0	190
45	205
90	180
135	210

TABLE IV.6 – Limites élastique pour l’essai de cisaillement du T40 [Mhenni]

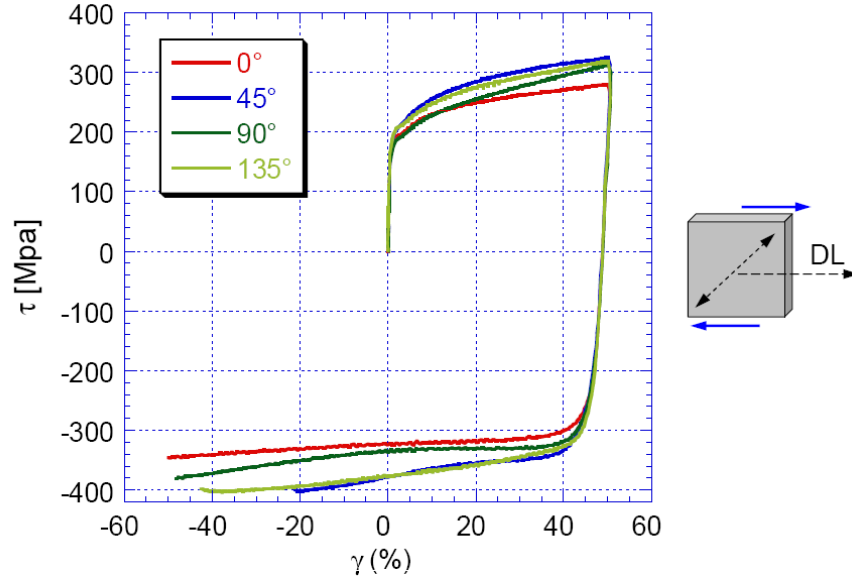


FIGURE IV.12 – Essais de cisaillement réalisés par le LPMTM [Mhenni]

De même, des essais cycliques permettant la caractérisation de l’effet Bauschinger ont été réalisés. La table IV.7 récapitule les résultats.

direction	$\gamma = 0,9$	$\gamma = 0,28$
0	0,25	0,33
90	0,17	0,28
135	0,23	0,30

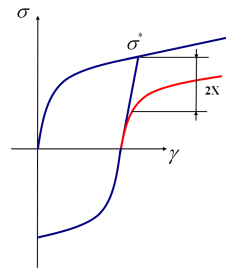


TABLE IV.7 – Mesure de l’effet Bauschinger  $X/\sigma^*$  pour l’alliage T40 [Mhenni]

### IV.1.3 Test de compression

Des essais de compression ont été réalisés au LPMTM par Najoua Ben Mhenni [Mhenni]. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous (Fig. IV.13).

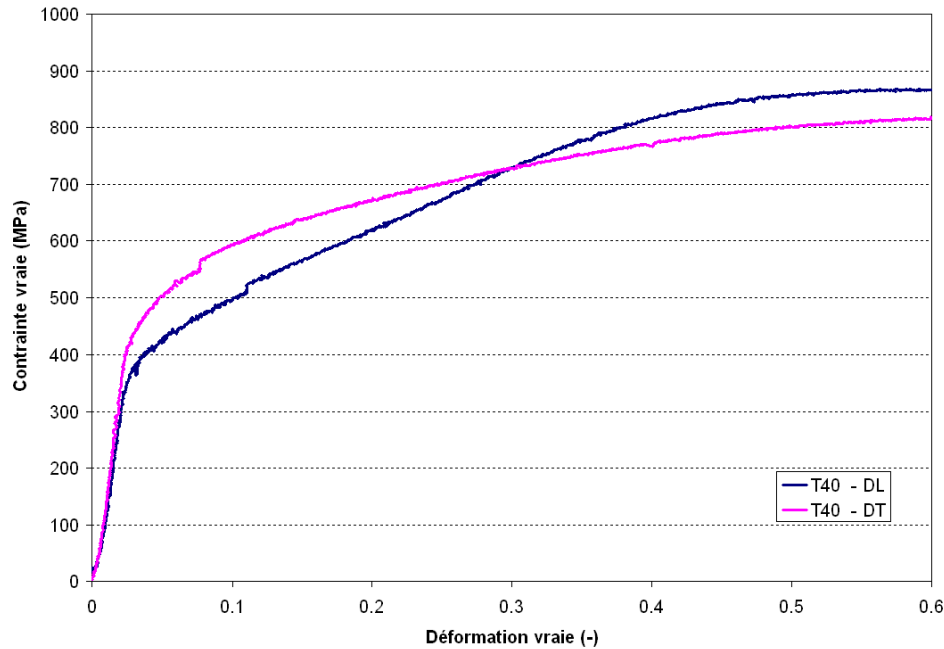


FIGURE IV.13 – Courbes contrainte/déformation issues du test de compression simple pour l'alliage T40 [Mhenni]

On peut donc en déduire les limites d'élasticité en compression dans la direction de laminage et la direction transverse (Tab. IV.8)

Direction	Limites élastique (MPa)
0	356
90	392

TABLE IV.8 – Limites élastiques pour l'essai de compression simple du T40

Les résultats des essais de traction (CEMEF, LPMTM), de cisaillement (LPMTM) et de compression simple (LPMTM) seront exploités pour établir une base de données utile à l'identification des modèles de comportement plastique.

## IV.2 Identification des paramètres du matériau

Pour pouvoir obtenir une simulation fiable des procédés de mise en forme à froid, il faut déterminer les paramètres du matériau pour les fonctions suivantes :

- le critère de plasticité anisotrope
- la loi d'écrouissage isotrope
- la loi d'écrouissage cinématique

Les chapitres précédents établissent les différentes modélisations permettant la simulation du formage des alliages de titane. Le choix du modèle et de la formulation anisotrope est un premier point dans l'obtention d'une simulation fiable. Le second est une bonne identification des jeux de paramètres du matériau pour le modèle choisi. Dans cette étude, les critères de plasticité seront mis en concurrence afin d'estimer leur précision dans la prédiction numérique. Mais, la procédure d'identification fait partie intégrante de cette procédure. Plusieurs stratégies seront utilisées pour déterminer les paramètres du critère de plasticité et des lois d'écrouissage. La table IV.9 résume les différentes stratégies de détermination des paramètres des critères de plasticité, en fonction de la base expérimentale utilisée. On attribue à chaque stratégie une lettre capitale afin de faciliter la compréhension de la suite du manuscrit.

Réf	Critère	Base expérimentale	Paramètres
A	Hill	Tests de traction uniaxiale	$F, G, H, L, M, N$
B	Hill	Coefficient de Lankford	$F, G, H, L, M, N$
C	Cazacu	Tests de traction uniaxiale	$a, k, L_{ij}$
D	Cazacu	Traction + Lankford	$a, k, L_{ij}$
E	Cazacu	Tous les tests	$a, k, L_{ij}$

TABLE IV.9 – Stratégie d'identification pour les critères de plasticité

L'identification du critère à partir d'une base expérimentale réduite (tests de traction uniquement) est réalisée pour se placer dans un contexte industriel, où seuls ces essais sont majoritairement exploités. La qualité de la modélisation avec une identification réduite pourra donc être discutée par la suite.

On utilise la même réflexion pour l'identification des lois d'écrouissage utilisées dans la formulation anisotrope. La table IV.10 expose les différentes stratégies d'identification utilisées dans ce manuscrit. Un chiffre romain désigne chacune d'entre elles.

Pour l'identification des paramètres du matériau, on se limite à des données expérimentales. Cependant des modèles microscopiques peuvent être utilisés pour identifier les surfaces de plasticité initiales [Rabahallah09a] [Lebensohn96].

Réf	Ecrouissage	Base expérimentale	Paramètres
I	Isotrope	Traction uniaxiale DL	$K, \epsilon_0, n$
II	Isotrope	Traction uniaxiale DL	$K, \epsilon_0, n; r, K_{sat}$
III	Isotrope "anisotrope"	Traction uniaxiale	$K_i, \epsilon_0^i, n_i$
IV	Isotrope + Cinématique	Traction uniaxiale DL + Bauschinger	$K, \epsilon_0, n, D, \psi$

TABLE IV.10 – Stratégie d'identification pour les lois d'écrouissages

## IV.2.1 Identification du critère de plasticité

### IV.2.1.a Identification du critère de Hill à partir des limites élastiques en traction

Cette procédure d'identification se base sur les limites élastiques obtenues lors d'essais de traction uniaxiale. Il s'agit de la méthode A pour le critère de plasticité.

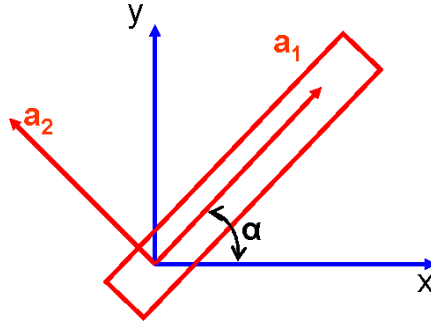


FIGURE IV.14 – Anisotropie et axes de traction dans un cas 2D.

Les vitesses de déformations dans le repère local (orienté par la direction de traction) peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A_{ik} A_{jl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{IV.5})$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

On peut donc calculer le tenseur des contraintes dans le repère d'anisotropie en fonction de la contrainte dans la direction de traction  $\sigma_t$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \cos(\alpha)^2 \sigma_t \\ \sigma_{22} &= \sin(\alpha)^2 \sigma_t \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sigma_t \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Le critère de plasticité de Hill 1948 (équation I.8) s'exprime en contraintes planes par la définition suivante :

$$f(\mathbf{S}) = (FS_{22}^2 + GS_{11}^2 + H(S_{11} - S_{22})^2 + 2NS_{12}^2)^{(0.5)} = \sigma_0 \quad (\text{IV.8})$$

En recombinaut cette équation avec l'expression des contraintes dans le repère d'anisotropie, on obtient la limite d'élasticité  $\sigma_t$  dans la direction de traction en fonction des paramètres de Hill, de la limite d'élasticité dans la direction de laminage  $\sigma_0$  :

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F \sin^4(\alpha) + G \cos^4(\alpha) + H(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))^2 + 2N \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)}} \quad (\text{IV.9})$$

On peut donc obtenir les valeurs des paramètres du critère de Hill en optimisant les paramètres F, G, H, et N pour permettre la minimisation de la fonction objectif suivante :

$$\phi = \sum_{i=1}^5 (f(\sigma_i) - \sigma_0)^2 \quad (\text{IV.10})$$

Un algorithme d'optimisation disponible dans le logiciel Matlab<sup>®</sup> permet la détermination du jeu de paramètres minimisant la fonction coût définie par l'équation IV.10. Une méthode du simplexe est utilisée.

L'application de cette méthode pour les deux alliages de titane de l'étude permet de déterminer les coefficients du critère de Hill résumés dans la table IV.11.

Coefficient	T40	SSAT 350
F	0,365	0,3384
G	0,612	0,6040
H	0,388	0,396
L=M=N	1,24	1,6139

TABLE IV.11 – Identification du critère de plasticité de Hill par la stratégie A pour le T40 et le SSAT 350

Le tracé comparatif des surfaces de plasticité pour une valeur d'écroutissage isotrope adimensionnée est réalisé sur la figure IV.15. Celles-ci sont très proches dans le plan des contraintes principales. D'un point de vue de l'anisotropie des contraintes, ces deux alliages de titane sont très proches, malgré des comportements mécaniques totalement différents.

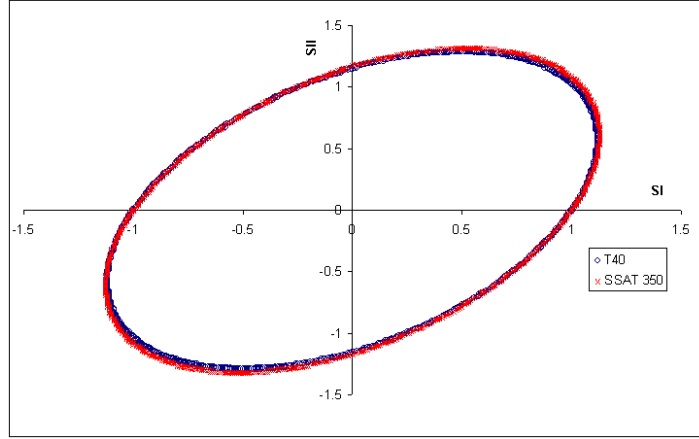


FIGURE IV.15 – Surfaces de plasticité identifiées par la stratégie A pour le T40 et le SSAT 350

#### IV.2.1.b Identification du critère de Hill par les coefficients de Lankford

Il s'agit donc de l'identification B du critère de plasticité. L'expression du coefficient de Lankford est la suivante (dans le repère orienté par la direction de traction représenté par l'exposant  $t$ ) en fonction des vitesses de déformation plastique :

$$r(\alpha) = \frac{\dot{\epsilon}_{22}^t}{\dot{\epsilon}_{33}^t} = -\frac{\dot{\epsilon}_{22}^t}{\dot{\epsilon}_{11}^t + \dot{\epsilon}_{22}^t} \quad (\text{IV.11})$$

A l'aide de la matrice  $[\mathbf{A}]$  (équation IV.6), on peut exprimer cette équation dans le repère des axes d'anisotropie :

$$r(\alpha) = -\frac{\dot{\epsilon}_{11}\cos^2(\alpha) + \dot{\epsilon}_{22}\sin^2(\alpha) + \dot{\epsilon}_{12}\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\dot{\epsilon}_{11}\cos^2(\alpha) + \dot{\epsilon}_{22}\sin^2(\alpha)} \quad (\text{IV.12})$$

La loi d'écoulement plastique permet de calculer les déformations plastiques à partir du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = \dot{\lambda} \frac{2G\sigma_{11} + 2H(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2\sigma_0} \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \dot{\lambda} \frac{2F\sigma_{22} - 2H(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2\sigma_0} \\ \dot{\epsilon}_{33} &= -(\dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{11}) \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \dot{\lambda} \frac{2N\sigma_{12}}{2\sigma_0} \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

On peut donc exprimer la valeur du coefficient de Lankford en fonction des paramètres du coefficient du critère de Hill.

$$r = \frac{H + (2N - F - G - 4H)\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{F\sin^2(\alpha) + G\cos^2(\alpha)} \quad (\text{IV.15})$$

Les expressions suivantes permettent de calculer les coefficients de la matrice de Hill en fonction de  $r_0$ ,  $r_{90}$ ,  $r_{45}$  :

$$\begin{aligned} F &= \frac{r_0}{r_{90}(1 + r_0)} \\ G &= \frac{1}{1 + r_0} \\ H &= \frac{r_0}{1 + r_0} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

$$N = \frac{2(F + G)r_{45} + F + G}{2} \quad (\text{IV.17})$$

Les alliages de l'étude peuvent donc être modélisés par une surface de plasticité de Hill, identifiée par la stratégie B. Les paramètres du matériau sont résumés dans la table [IV.12](#).

Coefficient	T40	SSAT 350
F	0,144	0,260
G	0,299	0,578
H	0,701	0,422
L=M=N	2,23	1,70

TABLE IV.12 – Identification du critère de plasticité de Hill par la stratégie B pour le T40 et le SSAT 350

Le tracé comparatif des surfaces de plasticité pour une valeur d'écroutissage isotrope adimensionnée est illustré par la figure [IV.16](#). D'un point de vue de l'anisotropie géométrique, on remarque des grandes différences entre les deux alliages de titane. On peut donc faire une première conclusion sur le critère de Hill, à savoir que suivant le choix de l'observable utilisée pour la procédure d'identification, on obtient des surfaces de plasticité totalement différentes. Deux matériaux qui ont une anisotropie en limites d'élasticité très proches peuvent avoir une anisotropie géométrique très éloignée. Il se pose donc la question du choix des données expérimentales à considérer lors de la détermination des paramètres du critère de Hill.

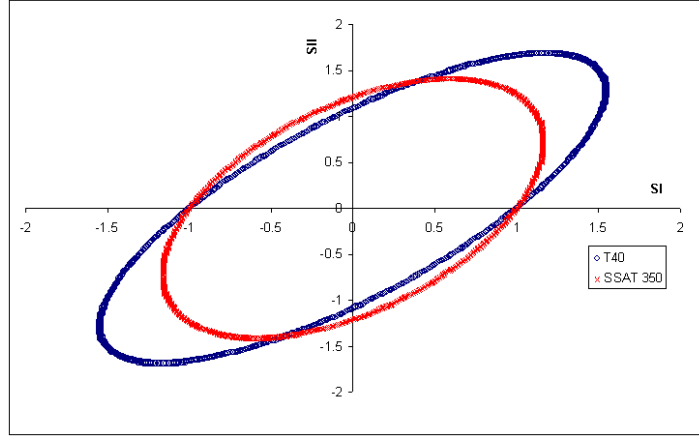


FIGURE IV.16 – Surfaces de plasticité identifiées par la stratégie B pour le T40 et le SSAT 350

#### IV.2.1.c Identification du critère de Cazacu 2006 à partir des limites d'élasticité en traction

La procédure d'identification du critère de Cazacu nécessite l'identification de neuf paramètres, en considérant que l'on fixe  $a = 2$  et  $L_{11} = 1$  (équation I.28). L'identification complète des paramètres du critère de Cazacu est théoriquement possible en exploitant 9 tests expérimentaux (Fig. IV.17) :

- 2 tests de traction uniaxiale
- 2 tests de compression uniaxiale
- 2 tests de traction biaxiale
- 2 tests de compression biaxiale
- 3 tests de cisaillement

Déterminer les paramètres du critère de Cazacu par l'intermédiaire de cinq tractions uniaxiales nécessite l'application d'une procédure d'identification et la mise en place d'une stratégie d'optimisation. Une fonction coût que l'on cherchera à minimiser, est définie par la méthode des moindres carrés :

$$\phi = \sum_{i=1}^5 (f(\sigma_i) - \sigma_0)^2 \quad (\text{IV.18})$$

La minimisation de la fonction coût, obtenue grâce à un algorithme du simplexe disponible dans Matlab®, basée sur cinq points, détermine les paramètres du matériau, résumés dans la table IV.13 pour les alliages de titane de l'étude.

Les surfaces de plasticité dans le repère des contraintes principales sont tracées sur la figure IV.18 pour une valeur d'écrouissage adimensionnée. L'identification d'une surface



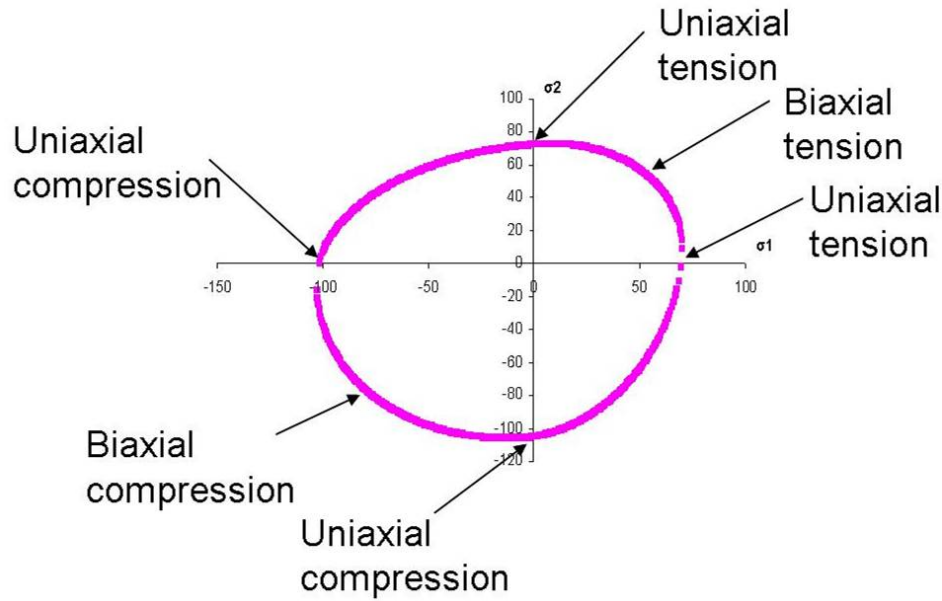


FIGURE IV.17 – Tests nécessaires pour l'identification des paramètres du critère d'anisotropie de Cazacu (hors test de cisaillement)

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
T40	0,0004	-0,0003	-0,0003	0,8682	-0,0001	2,0624	0,9278	0,9451	0,9467
SSAT 350	0,0002	0	0,0004	0,7029	0,0001	1,1030	0,9126	1,0910	1,0509

TABLE IV.13 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie C pour le T40 et le SSAT 350

de plasticité de Cazacu ne permet pas d'exploiter toute la capacité de la définition du critère, et notamment la non symétrie entre le comportement en traction et en compression. En effet le paramètre  $k$  est proche de zéro.

#### IV.2.1.d Prise en compte des coefficients de Lankford dans l'identification du critère de Cazacu

La stratégie D d'identification du critère de plasticité permet la prise en compte de l'évolution géométrique induite par l'anisotropie. Les coefficients de Lankford (équation IV.11) vont être utilisés pour affiner la méthode d'identification C. Le raisonnement suivi pour l'identification du critère de Hill par les coefficients de Lankford est transposé pour le critère de Cazacu. On peut donc exprimer le coefficient de Lankford dans la direction  $\alpha$  en fonction des composantes de la dérivée du critère, précédemment déterminées dans

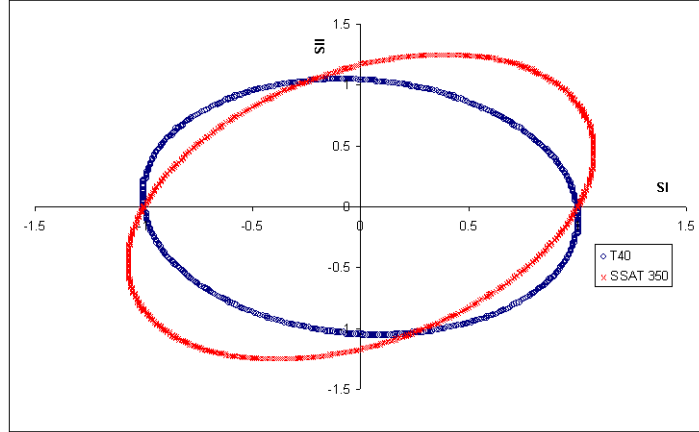


FIGURE IV.18 – Surfaces de plasticité identifiées par la stratégie C pour le T40 et le SSAT 350

le chapitre III :

$$r(\alpha) = \frac{\frac{\partial f}{\partial S_{11}} \sin^2(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial S_{22}} \cos^2(\alpha) - \frac{\partial f}{\partial S_{12}} \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\frac{\partial f}{\partial S_{33}}} \quad (\text{IV.19})$$

A partir de l'expression des coefficients de Lankord en fonction des paramètres du critère de Cazacu, on peut donc identifier la surface de plasticité sur dix grandeurs issues de tests de tractions uniaxiales. On intègre à la fois une identification en contrainte par le biais des limites élastiques et une identification en déformation avec les coefficients de Lankford. Les coefficients de Lankford étant déterminés pour une déformation avoisinant les 10%, les dérivées du critère doivent être calculées pour le même état. Les contraintes utilisées pour la détermination des coefficients de Lankford sont déterminées pour une déformation de 10% et résumées dans la table [IV.14](#)

Direction	T40 (MPa)	SSAT 350 (MPa)
0 °	511	973
30 °	500	929
45 °	499	908
60 °	506	943
90 °	529	989

TABLE IV.14 – Contraintes obtenues par le test de traction pour une déformation plastique de 10%

La fonction objectif servant à minimiser l'écart au moindres carrés entre les valeurs

expérimentales et les valeurs numériques s'exprime par :

$$\phi = \beta_1 \sum_{i=1}^5 \frac{(f(\sigma_i) - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2} + \beta_2 \sum_{i=1}^5 \frac{(r(\alpha_i)_{num} - r(\alpha_i)_{exp})^2}{(r(\alpha_i)_{exp})^2} \quad (IV.20)$$

Les valeurs des coefficients  $\beta_i$  sont déterminées de manière empirique tel que  $\beta_1 = 10$  et  $\beta_2 = 0,5$ . Ces valeurs permettent d'obtenir la même qualité d'optimisation pour les limites d'élasticité et les coefficients de Lankford. Les valeurs du critère de plasticité de Cazacu pour les deux alliages de titane sont déterminées par un algorithme du simplexe et résumées dans la table IV.15.

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
T40	0,0038	-0,0047	0,0055	0,6270	-0,005	0,4501	0,8859	0,8859	0,8859
SSAT 350	0,0522	-0,0165	0,0295	0,4832	-0,0648	0,6679	0,8467	0,8467	0,8467

TABLE IV.15 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie D pour le T40 et le SSAT 350

Les surfaces de plasticité sont tracées sur la figure IV.19. Les coefficients de Lankford permettent d'inclure dans la procédure d'identification des informations sur la normale à la surface de plasticité. La description de celle-ci avec le jeu de paramètres obtenu est donc plus précise. On remarque que la variable  $k$ , identifiée numériquement lors de la procédure, caractérisant la non symétrie entre le comportement en traction et en compression du critère n'est plus nulle afin de permettre à la surface de plasticité de respecter les conditions introduites sur sa normale.

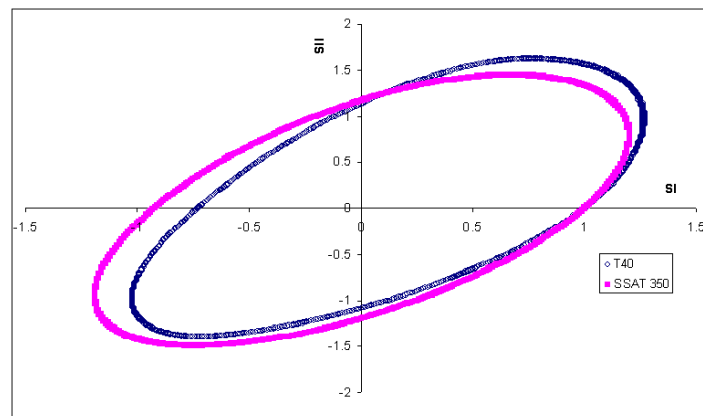


FIGURE IV.19 – Surface de plasticité identifiées par la stratégie D pour le T40 et le SSAT 350

#### IV.2.1.e Identification de la surface de plasticité de Cazacu à partir d'une large base expérimentale

L'identification du critère de Cazacu peut se baser sur toutes les données expérimentales, qui sont pour l'alliage T40, des tests de traction uniaxiale, de cisaillement simple et de compression uniaxiale. On peut rajouter à la procédure d'identification, la prise en compte d'anisotropie en déformation représentée par les coefficients de Lankford. La fonction coût à minimiser pour obtenir les valeurs de paramètres de la surface de plasticité peut se décomposer en quatre parties :

$$\begin{aligned} \phi = & \beta_1 \sum_{i=1}^5 \frac{(f(tract_i) - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2} + \beta_2 \sum_{i=1}^5 \frac{(r(\alpha_i)_{num} - r(\alpha_i)_{exp})^2}{(r(\alpha_i)_{exp})^2} \\ & + \beta_3 \sum_{i=1}^4 \frac{(f(cis_i) - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2} + \beta_4 \sum_{i=1}^2 \frac{(f(compr_i) - \sigma_0)^2}{\sigma_0^2} \end{aligned} \quad (IV.21)$$

Avec  $tract_i$  les limites d'élasticité en traction,  $r(\alpha_i)$  le coefficient de Lankford obtenu à 10% de déformation plastique dans la direction  $\alpha_i$ ,  $cis_i$  et  $compr_i$  respectivement les limites d'élasticité en cisaillement et en compression. Les poids  $\beta_i$  sont choisis empiriquement pour permettre aux termes de la fonction coût de tendre tous vers un résidu proche. La minimisation de la fonction coût, par un algorithme du simplexe, implique l'utilisation des paramètres définis dans la table IV.16 pour la construction de la surface de plasticité.

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
T40	0,0859	- 0,0064	-0,05	0,7360	- 0,04	0,4120	0,9684	0,9684	0,9684

TABLE IV.16 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie E pour l'alliage T40

Le paramètre  $k$  fixant la non symétrie du comportement mécanique en traction et en compression est déterminé de manière plus précise que pour les procédures d'identification précédentes, des données en compression étant intégrées dans la fonction objectif. Comme observé sur les essais de traction et de compression, les limites d'élasticité sont plus faibles lors d'une sollicitation en compression. Ce phénomène est traduit par une valeur positive du paramètre  $k$ . La représentation de la surface de plasticité avec les paramètres précédemment identifiés montre bien la modélisation de la non symétrie (Fig IV.20).

#### IV.2.1.f Comparaison des surfaces de plasticité identifiées

Les différentes surfaces de plasticité, identifiées selon les différentes procédures, pour

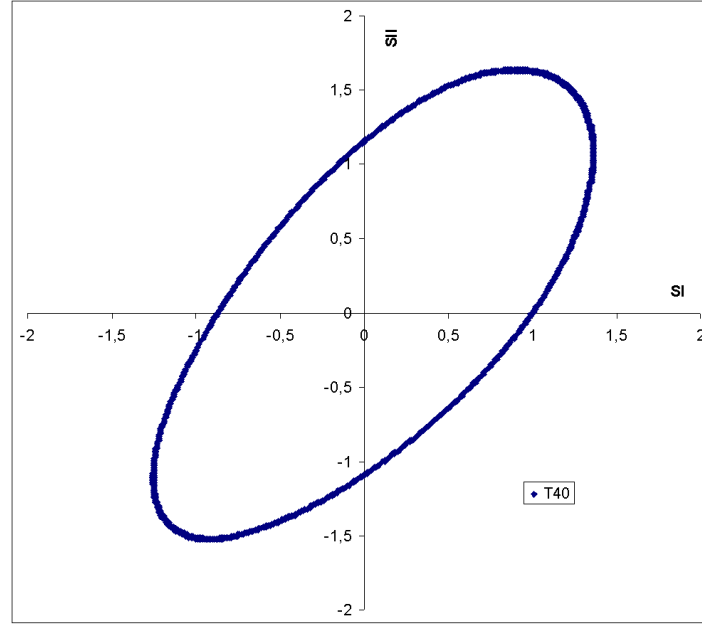


FIGURE IV.20 – Surface de plasticité identifiées par la stratégie E pour le T40

les alliages de titane T40 et SSAT 350, seront comparées analytiquement afin de discuter de l'apport de la stratégie d'identification dans la précision de la modélisation.

**i) Alliage de titane T40** Les surfaces de plasticité permettant la modélisation du comportement plastique de l'alliage de titane T40 sont tracées sur la figure IV.21.

Les procédures d'identification, basées uniquement sur les limites d'élasticité en traction pour le critère de Hill (Hill - A) et le critère de Cazacu (Cazacu - B) sont largement différentes des autres surfaces de charges, et notamment dans la représentation du comportement en sollicitation biaxiale. L'introduction de la prise en compte des coefficients de Lankford dans l'identification des surfaces de charges (Hill - B et Cazacu - D) permet une meilleure modélisation de la surface de plasticité. Ces dernières sont quasi-identiques pour les procédures d'identification B et D. La prise en compte d'une base expérimentale large (Cazacu - E) permet de mieux exploiter les possibilités du critère. Les limites d'élasticité en traction et en compression apportent la modélisation de la non-symétrie entre le comportement en traction et en compression, et les limites de cisaillement permettent d'obtenir de nouveaux points sur la surface de charge. La modélisation de la localisation des déformations en sollicitation biaxiale apparaît.

A la vue de la figure IV.21, la procédure d'identification de la surface de charge prend toute son importance pour l'alliage de titane T40. L'introduction de nouvelles grandeurs dans la stratégie de minimisation modifie grandement la forme de la surface de plasticité.

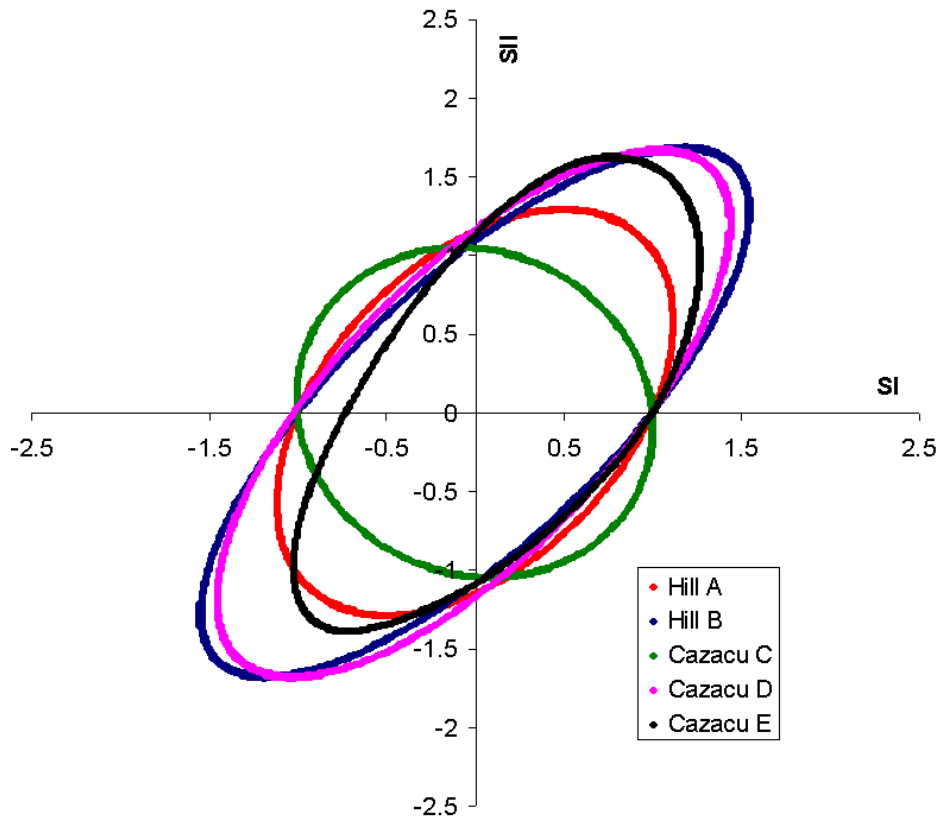


FIGURE IV.21 – Surfaces de plasticité pour l’alliage T40 identifiées par les différentes procédures

Ce matériau sera donc un bon test pour mesurer l’importance de la détermination des paramètres du matériau.

**ii) Alliage de titane SSAT 350** La figure IV.22 compare les différentes surfaces de charge issues de procédure d’identification, basée sur des stratégies différentes. Contrairement à l’alliage précédent, on ne remarque aucune différence dans l’orientation du grand axe de la surface entre les différentes stratégies d’identification. Les surfaces identifiées à partir des limites d’élasticité (stratégie A et C) décrivent une apparition de la plasticité pour des états de contraintes plus petits, notamment en état de contraintes biaxiales, que pour les procédures incluant les coefficients de Lankford (stratégie B et D). Cependant les différences entre toutes les surfaces de plasticité sont faibles, et le rôle de l’identification est moindre que pour l’alliage T40. En effet, l’alliage SSAT 350 possède une anisotropie en déformation (coefficient de Lankford) moins prononcée, et un critère de Hill peut ne pas être mis en défauts par de telles propriétés mécaniques. Cependant, l’absence d’information en cisaillement et en compression ne permet pas de conclure quant à la relative compétitivité entre les critères de plasticité.

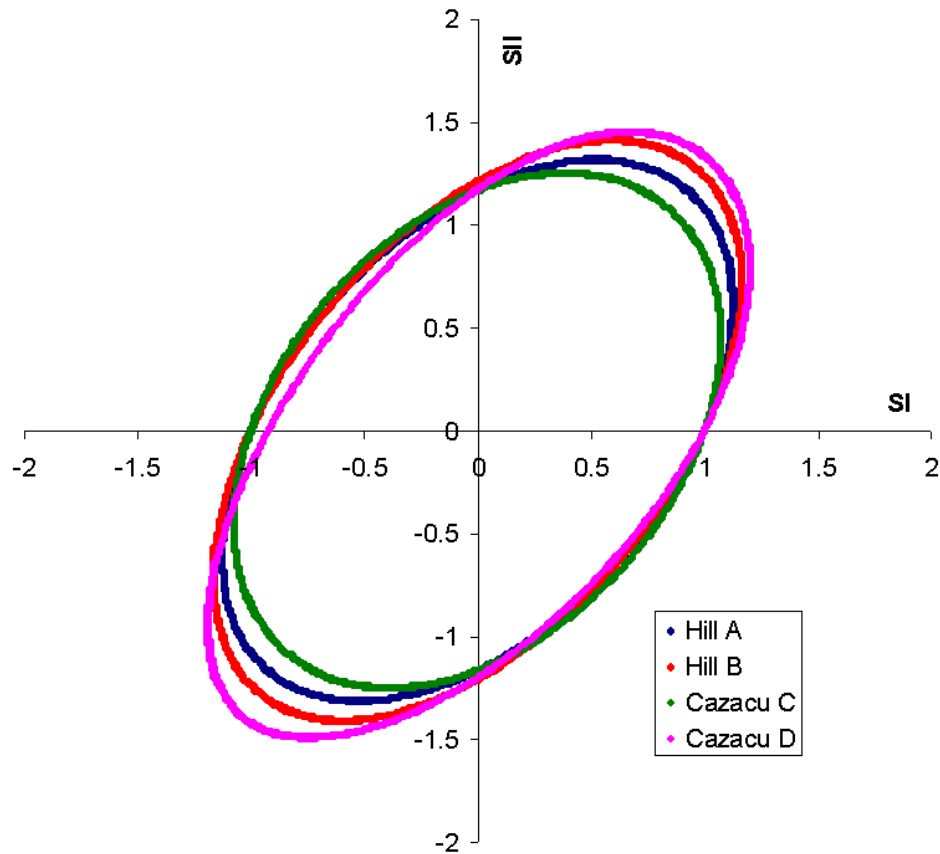


FIGURE IV.22 – Surfaces de plasticité identifiées pour l'alliage SSAT 350 selon les différentes procédures

L'identification d'une surface de charge, et notamment la stratégie à adopter dépend fortement des propriétés mécaniques des matériaux, et notamment l'anisotropie en contrainte et en déformation. On peut penser qu'un critère de Hill peut suffire à obtenir une bonne modélisation du comportement plastique de l'alliage de titane SSAT 350. En revanche, dans le cas de l'alliage T40, selon le critère de plasticité et la procédure d'identification choisis, les surfaces de plasticité sont très différentes. A première vue, aucune conclusion quant à la qualité de l'identification de la surface de plasticité des alliages de titane, ne peut être tirée. Cependant, comme pour tous problèmes de minimisation, plus le nombre de points de comparaison entre les modèles et les données expérimentales est conséquent, plus la qualité de la modélisation sera bonne.

## IV.2.2 Identification des lois d'écrouissage

### IV.2.2.a Identification de la loi d'écrouissage isotrope par une loi de Norton-Hoff

La caractérisation de la loi d'écrouissage isotrope est basée sur le comportement plastique des alliages de titane dans la direction de laminage dans la stratégie I (Table IV.10). On considère une évolution du comportement plastique semblable dans toutes les directions de sollicitations. Une loi de Norton-Hoff (eq. IV.22) est utilisée pour la modélisation du comportement plastique de l'alliage de titane :

$$\sigma_y = \sqrt{3} * K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon}^p)^n \quad (\text{IV.22})$$

Une fonction coût est définie au sens des moindres carrés entre la loi analytique et la courbe contrainte/déformation dans la direction de laminage, puis on minimise par une méthode du simplexe cette dernière pour déterminer les paramètres du matériau. La table IV.17 résume les paramètres obtenus par cette méthode, et la figure IV.23 compare la loi analytique et la courbe issue du test de traction uniaxiale dans la direction de laminage

Paramètres	T40	SSAT235
$K$	439,50	682,44
$\epsilon_0$	$1,57e^{-2}$	$1,66e^{-3}$
$n$	0,155	0,074
Erreur	0,26	0,004

TABLE IV.17 – Valeur des paramètres identifiés pour la modélisation de l'écrouissage par une loi de Norton-Hoff

Il s'agit de la méthode d'identification de l'évolution du comportement plastique la plus simple à mettre en oeuvre. Par contre elle se base uniquement sur la direction de laminage. On peut cependant essayer de raffiner la loi de comportement en ajoutant une fonction adoucissante permettant de modéliser la chute de contrainte à partir d'une déformation plastique donnée.

### IV.2.2.b Identification de la loi d'écrouissage isotrope par une loi adoucissante

La stratégie d'identification II se base sur le même principe que la I, mais en intégrant



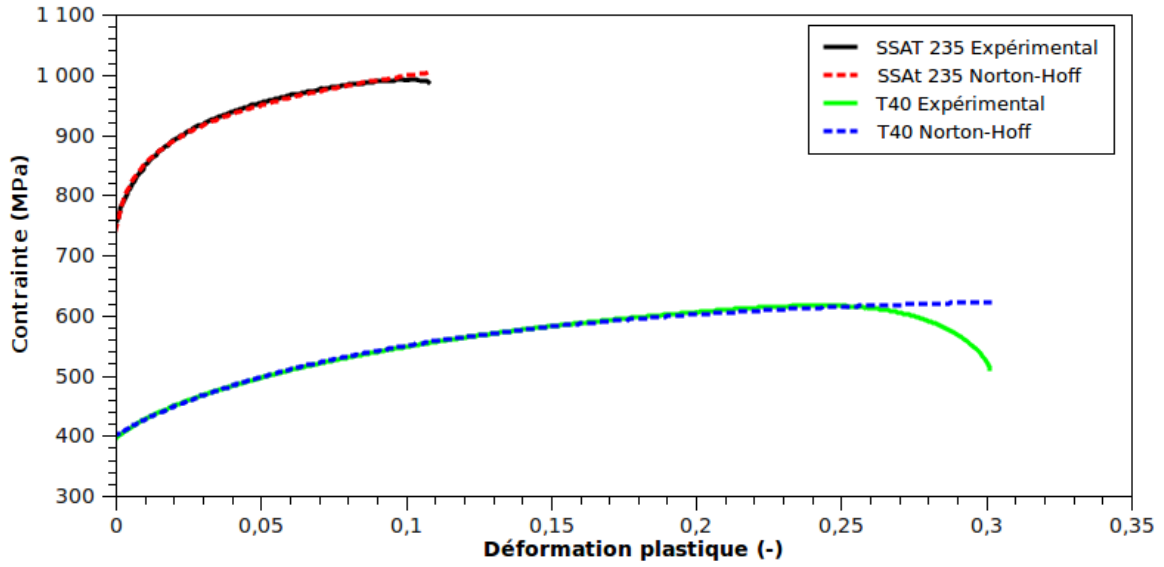


FIGURE IV.23 – Identification de l'écrouissage isotrope par une loi de Norton-Hoff

une loi décrivant de manière plus fine le comportement mécanique. On considère une évolution du comportement plastique régie par la loi adoucissante suivante :

$$\sigma_y = \sqrt{3} * K(\epsilon_0 + \epsilon_p)^n e^{-r\epsilon_p} + K_{sat}(1 - e^{-r\epsilon_p}) \quad (IV.23)$$

Cette procédure est appliquée sur les deux alliages de l'étude. La table IV.18 exprime les valeurs des paramètres du modèle. La figure IV.24 permet la comparaison entre les courbes théoriques et expérimentales. On remarque une bonne corrélation entre les deux.

Paramètres	T40	SSAT235
$K$	540,28	682,30
$\epsilon_0$	0,039	$1,66e^{-3}$
$n$	0,263	0,073
$r$	1,83	0,311
$K_{sat}$	293,83	500,04
Erreur	0,083	0,0034

TABLE IV.18 – Valeur des paramètres identifiés pour la modélisation de l'écrouissage par une loi adoucissante

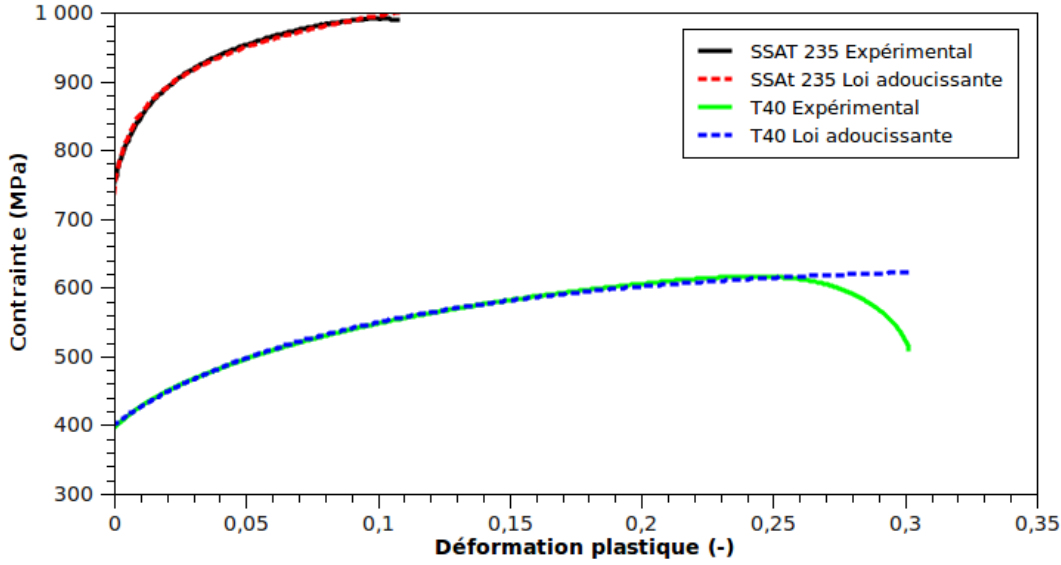


FIGURE IV.24 – Identification de l'écrouissage isotrope par une loi adoucissante

#### IV.2.2.c Identification d'une loi d'écrouissage dépendante de la direction de sollicitation

L'identification d'une loi de comportement dépendante de la direction de sollicitation nécessite plus de réflexion que pour les procédures I et II. Il faut identifier une loi d'écrouissage isotrope de type Norton-Hoff (équation IV.22) ou adoucissante (équation IV.23) pour les cinq orientations de traction uniaxiale. L'identification du critère de plasticité intervient donc dans la détermination des paramètres du matériau. On considère donc une identification pour le critère de Hill identifié par la stratégie A et la stratégie B. Utiliser une telle procédure avec le critère de Cazacu demande de fastidieux calculs.

Pour chaque test de traction orienté selon la direction  $\alpha$ , une fonction coût permettant une minimisation au sens des moindres carrés est définie en fonction de la matrice de Hill  $[\mathbf{H}]$  (équation I.9) selon :

$$\Phi = \frac{(\{\mathbf{S}\}^T[\mathbf{H}]\{\mathbf{S}\} - \sigma_y)^2}{(\{\mathbf{S}\}^T[\mathbf{T}]\{\mathbf{S}\})^2} \quad (\text{IV.24})$$

Les paramètres de la loi d'écrouissage permettant la modélisation du titane T40 en utilisant la stratégie B d'identification du critère sont détaillés dans les tables IV.19 et IV.20. Le récapitulatif des paramètres identifiés en utilisant la stratégie A pour définir la matrice de Hill sont résumés dans l'annexe C.

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	439,49	443,96	410,048	389,19	338,47
$\epsilon_0$	0,0157	0,014	0,008	0,012	0,008
$n$	0,154	0,133	0,093	0,090	0,0755
Erreur	0,08	0,077	0,21	0,07	0,22

TABLE IV.19 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d’identification III (loi de Norton-Hoff) pour l’alliage T40 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	540,28	568,80	712,57	537,79	532,80
$\epsilon_0$	0,039	0,053	0,089	0,047	0,065
$n$	0,263	0,270	0,40	0,233	0,294
$r$	1,83	1,620	2,350	1,090	2,799
$K_{sat}$	293,83	284,38	227,11	212,83	213,75
Erreur	0,083	0,007	0,011	0,016	0,039

TABLE IV.20 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d’identification III (loi adoucissante) pour l’alliage T40 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

La même procédure est effectuée pour le second alliage de titane SSAT 350, dont les paramètres sont résumés dans les tables [IV.21](#) et [IV.22](#). Les paramètres permettant la modélisation de l’écrouissage isotrope dépendant de la direction de sollicitation à partir de la matrice de Hill identifiée par la stratégie A sont résumés dans l’annexe C. Cette stratégie d’identification demande des efforts plus importants que les précédentes, les contraintes équivalentes doivent calculées pour chaque direction de sollicitation et pour chaque critère de plasticité.

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	682,44	624,46	581,19	555,78	547,43
$\epsilon_0$	0,002	0,001	0,0003	0,002	0,01
$n$	0,074	0,045	0,031	0,0246	0,054
Erreur	0,004	0,02	0,03	0,019	0,04

TABLE IV.21 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d’identification III (loi de Norton-Hoff) pour l’alliage SSAT 350 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	682,30	666,99	821,26	918,71	749,21
$\epsilon_0$	0,002	0,002	0,01	0,019	0,01
$n$	0,073	0,063	0,122	0,171	0,126
$r$	0,311	0,368	2,64	3,59	3,84
$K_{sat}$	300,04	0,658	230	215,38	213,02
Erreur	0,0034	0,023	0,008	0,04	0,006

TABLE IV.22 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi adoucissante) pour l'alliage SSAT 350 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

#### IV.2.2.d Identification des lois d'écrouissage isotrope et cinématique

La stratégie d'identification IV utilise un modèle qui allie à la fois l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope. La détermination des paramètres pour ces deux lois demande l'utilisation d'une procédure d'identification plus complexe que précédemment. En effet, on ne peut découpler l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique pour permettre l'identification séparée des deux lois de comportement, même si l'écrouissage isotrope est observé lors du durcissement plastique et l'écrouissage cinématique lors de sollicitations cycliques. Tous les deux interviennent dans le calcul de l'incrément de contrainte à des niveaux différents, comme entrevu dans le chapitre III. Il faut donc utiliser une stratégie d'optimisation itérative, qui met en jeu à la fois un test de traction et un test de cisaillement simple en trajet inversé.

**i) L'algorithme d'optimisation** Une plateforme d'optimisation [Roux] en cours de développement au CEMEF est utilisée pour la détermination des paramètres d'écrouissage isotrope et cinématique. L'algorithme d'optimisation est basé sur la minimisation de la surface de réponse, définie par la fonction objectif du système. Un algorithme génétique génère un nombre de jeu de paramètres initial permettant l'établissement d'une première surface de réponse. Une analyse de cette dernière permet d'estimer le jeu de paramètres suivant où les possibilités d'amélioration sont maximales. Un algorithme de kriggeage est utilisé [Jones98] pour essayer de minimiser la fonction coût. Cette plateforme d'optimisation est adaptable sur de nombreux supports de calcul, les seules entrées/sorties nécessaires sont le jeu de paramètres en entrée et le calcul de la fonction coût en sortie. Cet algorithme va être utilisé pour l'identification d'un comportement plastique régi par une loi d'écrouissage isotrope et une loi d'écrouissage cinématique.

**ii) Fonction objectif du système** L'optimisation de l'écrouissage isotrope et cinématique implique la définition d'une fonction coût à plusieurs observables. Dans notre problème, ces observables sont la courbe contrainte/déformation dans la direction de laminage issue du test de traction uniaxiale et des valeurs de l'effet Bauschinger (table IV.7) réalisé par le LPMTM pour plusieurs valeurs de déformation plastique lors d'un test de cisaillement inversé. On cherchera donc à minimiser l'écart entre la réponse numérique et expérimentale pour la courbe contrainte/déformation, tout en optimisant la valeur de l'effet Bauschinger pour deux valeurs de cisaillement ( $\gamma = 0,09$  et  $\gamma = 0,28$ ) lors du test de cisaillement simple inversé orienté dans la direction de laminage.

Ce raisonnement mène donc à la définition de la fonction coût  $\Phi$  telle que :

$$\Phi = \alpha_t \sum_{i=1}^n \frac{(\sigma_i - \sigma_y)^2}{\sigma_y^2} + \alpha_c \frac{((X/\sigma)_{num} - (X/\sigma)_{exp})^2}{(X/\sigma)_{exp}^2} \Big|_{\gamma=0,09} + \alpha_c \frac{((X/\sigma)_{num} - (X/\sigma)_{exp})^2}{(X/\sigma)_{exp}^2} \Big|_{\gamma=0,25} \quad (IV.25)$$

avec  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  les poids donnés respectivement à la traction et au cisaillement. Ces derniers ont été déterminés de manière empirique pour permettre à l'algorithme d'optimisation de converger vers une solution acceptable pour tous les objectifs. On considère l'optimisation finie et fiable lorsque les trois termes de la fonction coût tendent vers un même résidu. On pose donc  $\alpha_t = 0,05$  et  $\alpha_c = 1$ . Le poids de la traction est beaucoup plus faible car le nombre de points disponibles est élevé (environ 200) par rapport aux deux points de cisaillement simple disponibles.

**iii) Calcul de la réponse numérique** La recherche des paramètres du matériau optimisés implique la simulation numérique de tests à sollicitation simple, à savoir la traction et le cisaillement simple, afin de permettre l'établissement de la fonction coût. La prédiction numérique peut être réalisée par la méthode des éléments finis. Cependant, le temps de calcul nécessaire à l'obtention des résultats de traction et de cisaillement simple est d'environ une heure. L'algorithme d'optimisation a besoin d'environ 300 estimations de la fonction coût pour atteindre une bonne convergence, ce qui implique un temps de calcul éléments finis d'environ 300h (environ 12 jours) dans la boucle d'optimisation. Un tel temps de calcul est beaucoup trop important pour une optimisation de lois d'écrouissage, une autre méthode a été envisagée.

Les calculs ne seront plus effectués par une méthode éléments finis, mais par une formulation semi-analytique à 1 dimension. L'algorithme du retour radial permettant de séparer les transformations plastiques des transformations élastiques est utilisé pour calculer l'incrément de contrainte. Les mêmes méthodes que celles présentées dans le chapitre III sont utilisées pour permettre le calcul de l'incrément de contrainte. En revanche au lieu d'utiliser une méthode éléments finis pour la détermination des vitesses et donc des déformations, les déformations analytiques connues pour des tests de traction et de cisaillement sont introduites directement en amont de l'algorithme du retour radial. Le développement de ce petit utilitaire permettant donc de tracer une courbe contrainte/déformation et des trajets de chargements cycliques en cisaillement en un temps de calcul très faible (environ 1mn pour un calcul de traction et deux calculs de cisaillement) permet une forte accélération de l'optimisation des paramètres du matériau. Les sorties de ce programme sont une courbe contrainte/déformation et des courbes de cisaillement simple avec un déchargement cyclique. Toutes ces sorties numériques permettent de calculer aisément la fonction coût du problème d'optimisation, et ce en un temps très bref.

Ce petit outil permet l'identification d'un comportement mécanique couplant un écrouissage isotrope et un écrouissage cinématique, sans utiliser de solveur éléments finis lourd à mettre en place et coûteux en temps de calcul.

**iv) Identification des paramètres** La stratégie d'identification IV permet la modélisation de l'évolution du comportement plastique par deux lois d'écrouissage isotrope et cinématique. Cette méthode est appliquée uniquement pour l'alliage de titane T40, du fait qu'il soit le seul dont on connaisse son comportement en cisaillement cyclique. Le tenseur cinématique  $[\mathbf{X}]$  est défini par une loi d'Armstrong-Frederick (équation I.37), dont la formule est rappelée ci-dessous :

$$[\dot{\mathbf{X}}] = D[\dot{\epsilon}^p] - \xi[\mathbf{X}]\dot{\epsilon}^p \quad (\text{IV.26})$$

Dans un premier temps, l'écrouissage isotrope est modélisé par une loi de Norton-Hoff (équation IV.22) à trois paramètres. L'évolution de la fonction objectif en fonction des itérations est représentée par la figure IV.25. L'optimisation nécessite cinq cents simulations afin de déterminer le meilleur jeu de paramètre.

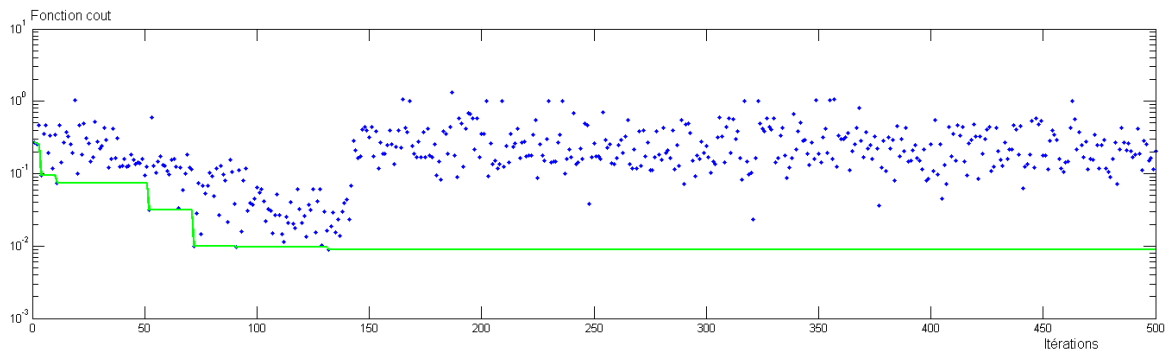


FIGURE IV.25 – Evolution de la fonction objectif en fonction des itérations de simulation : modélisation de l'écrouissage isotrope par une loi de Norton-Hoff

La table IV.23 résume le jeu de paramètres optimal permettant d'obtenir une valeur de la fonction coût de  $8,9 \cdot 10^{-3}$ .

	$K$	$\epsilon_0$	$n$	$D$	$\xi$
T40	451,83	0,007	0,163	4778,13	127,5

TABLE IV.23 – Identification des lois d'écrouissage par la stratégie IV pour l'alliage de titane T40, dont l'écrouissage isotrope est modélisé par une loi de Norton-Hoff

La figure IV.26 compare le calcul numérique et les données expérimentales pour le test de traction dans la direction de laminage et les courbes de la figure IV.27 représente

chacune un cycle charge/décharge pour un test de cisaillement simple, l'un se déroulant pour une déformation de 8% et le second pour 25%. L'identification des paramètres est correcte pour le comportement en traction. Concernant le comportement cyclique, et notamment les valeurs des effets Bauschinger obtenues numériquement, on remarque une bonne représentation du comportement pour une déformation de 8% (0.21 prédit numériquement contre 0.25 expérimentalement). Par contre, si la décharge a lieu pour une déformation plus grande (25%), le modèle numérique s'éloigne des valeurs expérimentales (0.23 prédit numériquement contre 0.33 obtenu expérimentalement). L'identification d'un écrouissage isotrope et cinématique par une loi de Norton-Hoff combinée à une loi de Armstrong-Frederick permet une représentation correcte du comportement de l'alliage de titane T40.

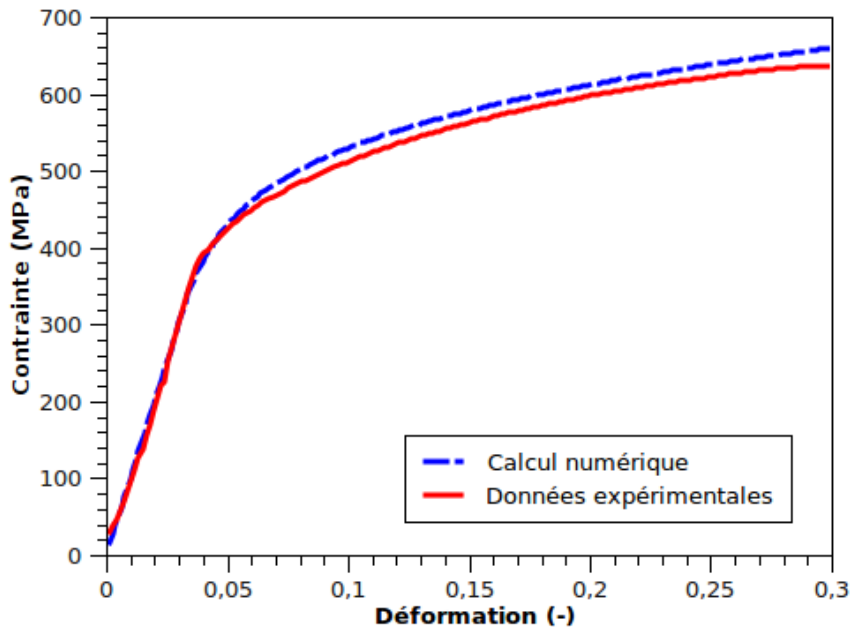


FIGURE IV.26 – Comparaison entre le calcul numérique et les données expérimentales de la courbe contrainte/déformation obtenue dans la direction de laminage : Modélisation de l'écrouissage isotrope par une loi de Norton-Hoff

Dans une seconde étape, la loi d'écrouissage isotrope est raffinée par l'utilisation d'une loi adoucissante à cinq paramètres (équation IV.23) pour essayer d'améliorer la modélisation. L'évolution de la fonction objectif en fonction des itérations est représentée par la figure IV.28.

La table IV.24 résume le jeu de paramètres optimal permettant d'obtenir une valeur de la fonction coût de  $2,5 \cdot 10^{-3}$ .



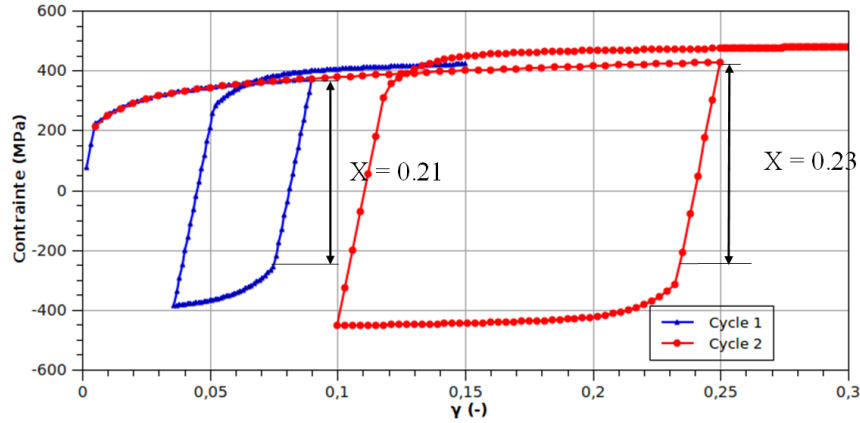


FIGURE IV.27 – Résultats numériques du test de cisaillement simple cyclique pour deux cycles : décharge à 8% et à 25% de déformation pour l’alliage T40 avec une modélisation de l’écrouissage isotrope par une loi de Norton-Hoff.

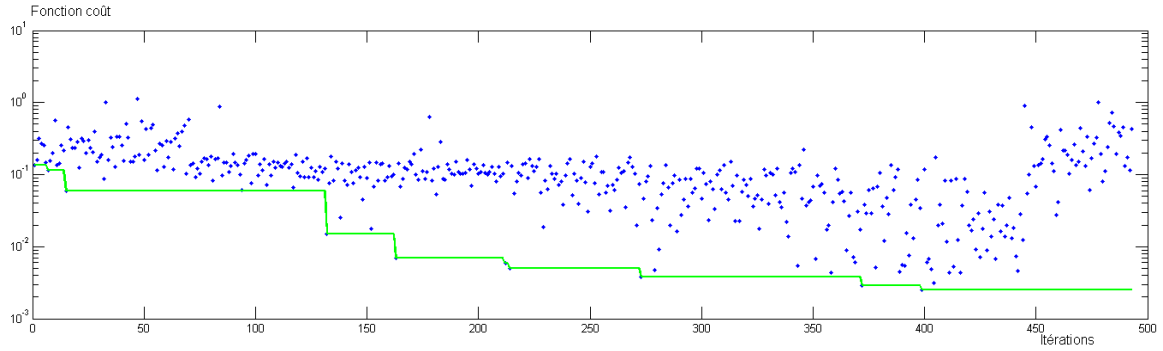


FIGURE IV.28 – Evolution de la fonction objectif en fonction des itérations de simulation : modélisation de l’écrouissage isotrope par une loi adoucissante

La figure IV.29 compare le calcul numérique et les données expérimentales pour le test de traction dans la direction de laminage et les courbes de la figure IV.30 représente deux cycles de charge/décharge obtenus numériquement par le calcul semi-analytique. On peut donc vérifier que l’identification réalisée par cette stratégie est correcte et légèrement plus précise que la précédente, notamment pour la représentation des effets Bauschinger pour le cycle charge/décharge pour une déformation de 25% (0.284 prédit numériquement contre 0.33 expérimentalement).

L’identification des paramètres du modèle a été réalisée selon plusieurs stratégies afin d’étudier la sensibilité des résultats numériques à la qualité de cette identification. Concernant le critère de plasticité, cinq méthodes différentes ont permis l’identification des critères de Hill et de Cazacu à partir de résultats expérimentaux variés. Les paramètres des lois d’écrouissage ont été déterminés pour quatre modèles différents, plus ou moins complexes. Des calculs numériques de tests simples vont permettre d’émettre

	$K$	$\epsilon_0$	$n$	$r$	$K_{sat}$	$D$	$\xi$
T40	406,342	0,08	0,223	0,532	369,2	4471,25	93,0067

TABLE IV.24 – Identification des lois d'écroutissage par la stratégie IV pour l'alliage de titane T40, dont l'écroutissage isotrope est modélisé par une loi adoucissante

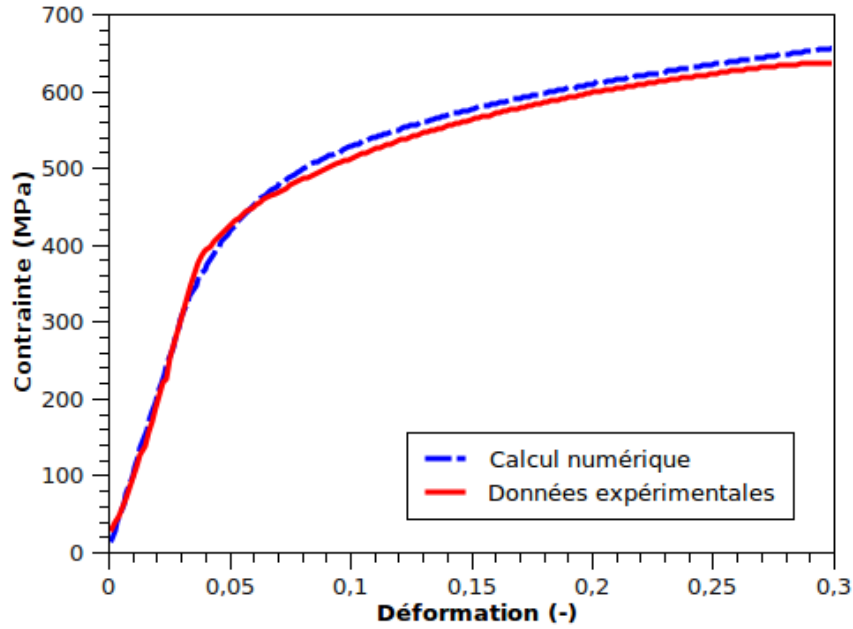


FIGURE IV.29 – Comparaison entre le calcul numérique et les données expérimentales de la courbe contrainte/déformation obtenue dans la direction de laminage : Modélisation de l'écroutissage isotrope par une loi adoucissante

un premier avis sur l'importance de l'identification des modèles anisotropes dans la simulation de la mise en forme de produits minces.

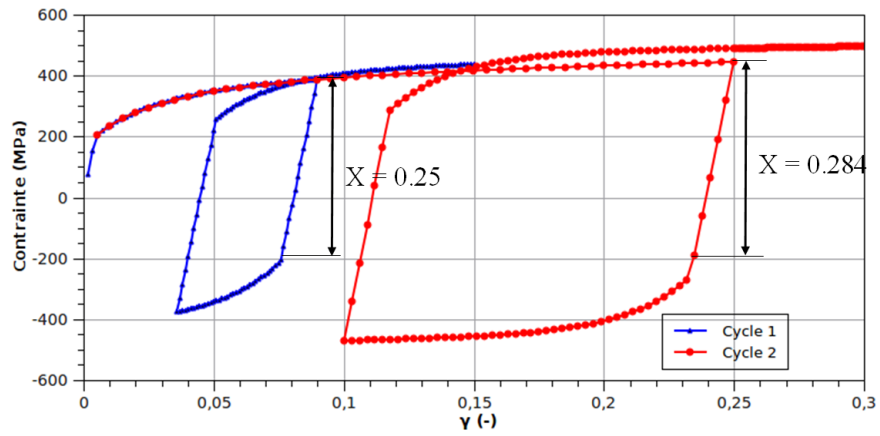


FIGURE IV.30 – Résultats numériques du test de cisaillement simple cyclique pour deux cycles : décharge à 8% et à 25% de déformation pour l'alliage T40 avec une modélisation de l'écrouissage isotrope par une loi adoucissante.

## IV.3 Comparaisons numériques entre les différentes procédures d'identifications

Les premières simulations numériques vont permettre de tirer les premières conclusions sur la fiabilité des stratégies d'identification des paramètres utilisées pour caractériser le comportement plastique des alliages de titane. Dans cette partie, seul l'alliage T40 sera exploité. En effet, les différents critères de plasticité identifiés pour ce matériau (Fig. IV.21) définissent des surfaces de charges éloignées selon la base de données expérimentale choisie. L'importance et l'effet de l'ajout d'observables dans la procédure d'identification peuvent donc être observés plus facilement pour l'alliage de titane commercialement pur que pour le matériau SSAT 350. Dans un premier temps, des simulations des tests de traction permettront de comparer les résultats numériques sur les champs de déformation plastique, les coefficients de Lankford et les efforts sur les outils. Dans un second temps, des simulations de cisaillement simple permettront de conclure quant à l'identification des modèles en terme de comportement cyclique.

### IV.3.1 Simulation des tests de traction uniaxiale

Les tests de traction uniaxiale sont simulés avec la formulation anisotrope précédemment définie. Dans un premier temps, l'influence du critère de plasticité et de son identification sera comparée en termes de cartographie de champ de déformation et de coefficients de Lankford. Dans un second temps, la meilleure modélisation de la loi d'écrouissage sera déterminée par une comparaison entre les résultats numériques et les données expérimentales issues du test de traction, notamment les forces de traction.

#### IV.3.1.a Carte de déformation plastique

Les essais de traction dans les différentes directions sont simulés et les cartes de déformation plastique obtenues numériquement comparées avec celles déterminées par corrélation d'images avec le logiciel Aramis®. Deux orientations ont été particulièrement choisies parmi les cinq directions disponibles. Il s'agit de la direction transverse et la direction à 45 ° par rapport à la direction de laminage. Ces dernières permettent donc d'émettre des premières conclusions quant à l'efficacité des critères de plasticité.

**i) Essai de traction dans la direction transverse** La figure IV.31 représente les

déformations plastiques obtenues pour un essai de traction dans la direction transverse en considérant une elongation de 24%. Une corrélation d'images par le logiciel Aramis® permet d'obtenir un élément de comparaison expérimental. Toutes les simulations sont réalisées avec la même loi d'écrouissage, à savoir la loi de Norton-Hoff identifiée par la stratégie I. Pour des raisons de lisibilité, les mêmes isovaleurs ne peuvent pas être tracées sur toutes les cartographies, notamment lorsque la valeur maximale prédite numériquement est supérieure à celle observée expérimentalement.

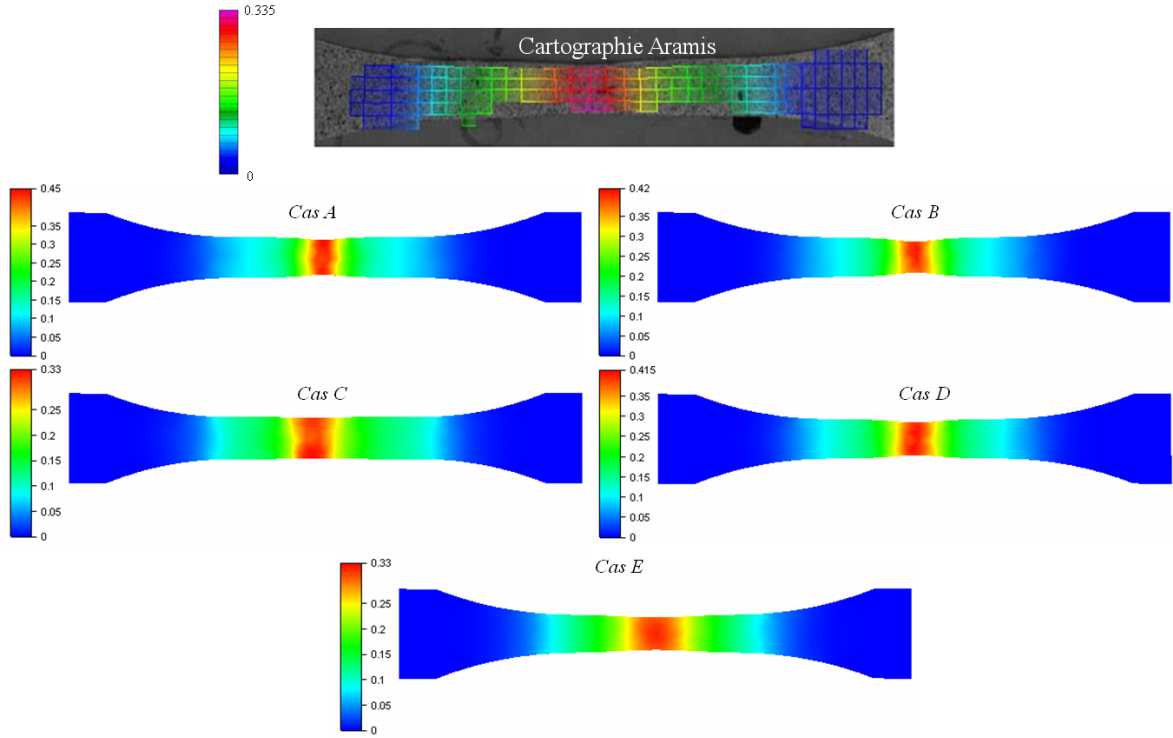


FIGURE IV.31 – Carte de déformation plastique obtenu pour un test de traction uniaxiale dans la direction transverse pour l'alliage T40 : Comparaison entre des mesures expérimentales (Aramis®) et prédit numériquement en fonction du critère de plasticité et de la stratégie d'identification.

Le critère de Hill ne parvient pas, quelques soient les stratégies d'identification, à modéliser correctement la déformation plastique dans la zone de striction, en prédisant des valeurs trop élevées. En dehors de cette zone, les valeurs prédites correspondent à celles observées expérimentalement. Concernant le critère de Cazacu, on remarque une dépendance entre la stratégie d'identification utilisée et la prédiction de la déformation plastique. Dans le cas d'une détermination des paramètres du critère uniquement à partir des limites d'écoulement plastique en traction (stratégie C) ou en utilisant toutes les données expérimentales (stratégie E), la prédiction numérique est conforme à la cartographie obtenue par corrélation d'images. En effet, la simulation numérique indique une déformation plastique équivalente d'environ 0,33 contre 0,335 observée expérimentalement.

talement. La prise en compte des coefficients de Lankford et des limites d'élasticité en traction dans la stratégie d'identification (stratégie D) implique une surestimation des grandeurs prédites dans la zone de striction.

Après avoir discuté sur les cartographies de déformations plastiques, la largeur de l'éprouvette est le second élément comparateur pour connaître l'influence de l'identification des critères de plasticité sur les résultats numériques. La table IV.25 référence les différentes largeurs mesurées en fonction du critère de plasticité et de la stratégie d'identification utilisés.

Cas	Largeur (mm)	Erreur
Expérimental	9,74	
Stratégie A	9,48	2,6%
Stratégie B	8,46	13,1%
Stratégie C	11,30	16%
Stratégie D	9,00	7,6%
Stratégie E	9,05	7,0%

TABLE IV.25 – Influence des stratégies d'identification du critère de plasticité sur la largeur d'une éprouvette de traction dans la direction transverse d'alliage T40

Le critère de Hill identifié par la stratégie A (limites d'élasticité en traction) donne la meilleure prédiction. Ce résultat est quelque peu étrange, aucune donnée géométrique n'est utilisée pour la détermination des paramètres de celui-ci. On peut cependant remarquer que le critère de Hill a tendance à sous-estimer cette largeur, ce qui est notamment fortement visible pour celui identifié par les coefficients de Lankford (stratégie B). Concernant le critère de Cazacu, les résultats peuvent s'expliquer logiquement, la prise en compte des coefficients de Lankford dans la procédure d'identification (stratégie D et E) permet une prédiction correcte de la largeur de l'éprouvette de traction. En utilisant uniquement les limites d'élasticité (stratégie C), la largeur prévue par la simulation numérique est totalement fausse.

A travers ces comparaisons sur le test de traction dans la direction transverse, l'importance du critère de plasticité ressort fortement. On entrevoit une meilleure prédiction par le critère de Cazacu comparé au critère de Hill. Cependant, plus encore que la formulation du critère, la stratégie d'identification est vitale pour obtenir des simulations numériques fiables.

**ii) Essai de traction orienté à  $45^\circ$**  La même étude est effectuée pour un test de traction orienté à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage. La figure IV.26 compare les

cartographies de déformations prédites numériquement selon la modélisation du comportement plastique à des mesures expérimentales obtenues par corrélation d'images. Les échelles de chaque figure ne sont pas semblables afin de rendre lisible l'évolution de la déformation plastique dans la zone strictionnée.

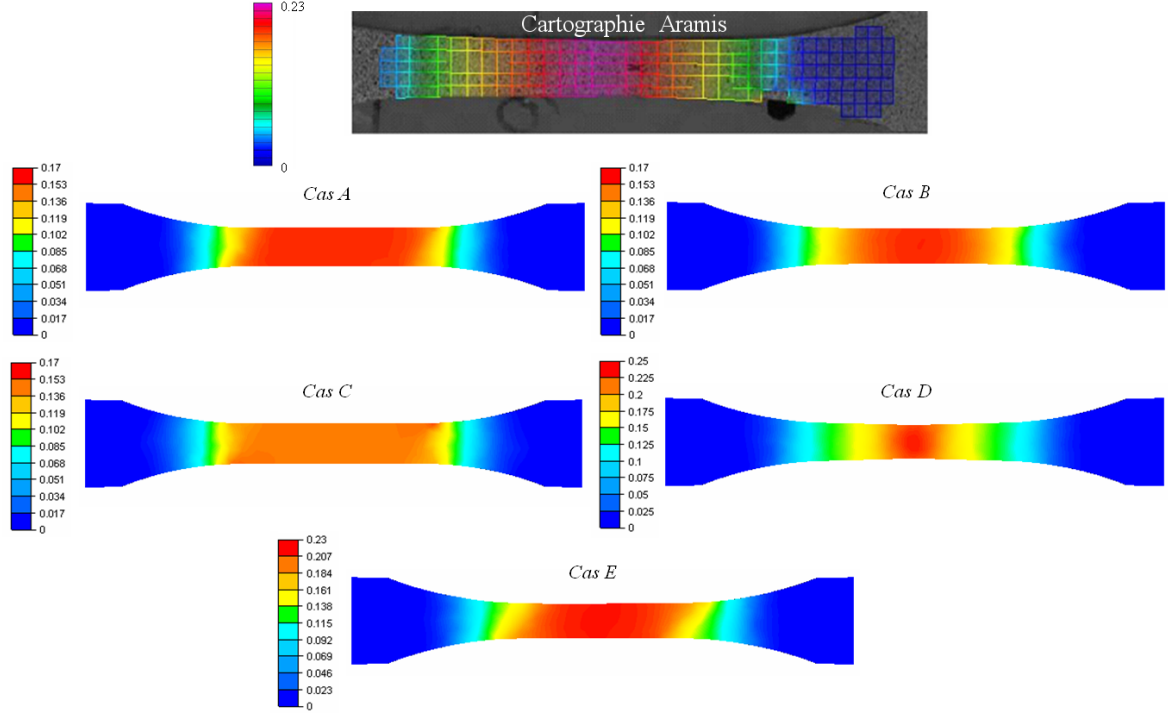


FIGURE IV.32 – Carte de déformation plastique obtenu pour un test de traction uniaxiale orientée à 45 ° pour l'alliage T40 : Comparaison entre des mesures expérimentales (Aramis®) et prédit numériquement en fonction du critère de plasticité et de la stratégie d'identification.

Les mêmes conclusions concernant le critère de Hill peuvent être tirées de cette comparaison. Cependant, dans ce cas précis, ce dernier sous-estime les déformations plastiques dans la zone de striction. On peut donc en conclure que le critère de Hill ne permet pas la prédiction des déformations plastiques dans des zones strictionnées. Les prédictions numériques obtenues, en utilisant un critère de Cazacu, dépendent cette fois-ci encore fortement de la stratégie d'identification utilisée. Contrairement au test dans la direction transverse, la stratégie C ne permet plus une bonne modélisation. Les simulations les plus fiables sont obtenues pour les deux autres stratégies (stratégies D et E). L'utilisation des coefficients de Lankford associés aux limites d'élasticité dans la détermination des paramètres du critère donne des résultats très satisfaisants, la zone de localisation des déformations plastique commençant à apparaître. L'identification grâce à une base complète de données expérimentales ne parvient pas à décrire correctement cette zone, mais les valeurs prédites sont proches de celles obtenues expérimentalement par mesure de champs.

Les mesures des largeurs permettent de confirmer les constats entrevus lors de la traction dans la direction transverse. L'apport de données géométriques, à savoir les coefficients de Lankford, dans la procédure d'identification, est important en terme de variation de géométrie au cours de la transformation. La table IV.32 résume les différentes largeurs prédites par la simulation numérique. Les meilleures modélisations sont donc la stratégie B, D, et E.

Cas	Largeur	Erreur
Expérimental	9,82	
Stratégie A	10,97	11,7%
Stratégie B	10,00	1,8%
Stratégie C	11,64	18.5%
Stratégie D	9,52	3,0%
Stratégie E	9,58	2,4%

TABLE IV.26 – Influence des stratégies d'identification du critère de plasticité sur la largeur d'une éprouvette de traction orientée à 45 ° d'alliage T40

#### IV.3.1.b Coefficients de Lankford numériques

Le comportement anisotrope des matériaux est caractérisé par les coefficients de Lankford (Fig. IV.7). A partir des cinq jeux de paramètres pour les critères de plasticité identifiés précédemment, on va donc mesurer numériquement les coefficients de Lankford, pour les comparer avec les valeurs expérimentales. La table IV.27 résume les valeurs obtenues pour chaque stratégie d'identification et la figure IV.33 représente l'évolution des coefficients de Lankford en fonction de l'orientation par rapport à la direction de laminage.

Direction	A	B	C	D	E	Expérimental
0 °	0,665	2,199	0,228	2,163	2,11	2,34
30 °	0,783	4,056	0,230	3,094	3,49	2,61
45 °	0,896	4,308	0,248	4,130	4,46	4,52
60 °	1,057	5,713	1,057	5,538	4,98	4,41
90 °	1,033	4,264	1,033	5,517	4,95	4,86

TABLE IV.27 – Valeur des coefficients de Lankford, mesurés numériquement en fonction des stratégies d'identification du critère de plasticité.

Le premier constat que l'on peut conclure de cette étude est l'inefficacité des critères identifiés purement sur les contraintes élastiques (stratégie A et B). Ils ne permettent pas la prédiction des variations de géométrie dues à une forte anisotropie. Toutes les



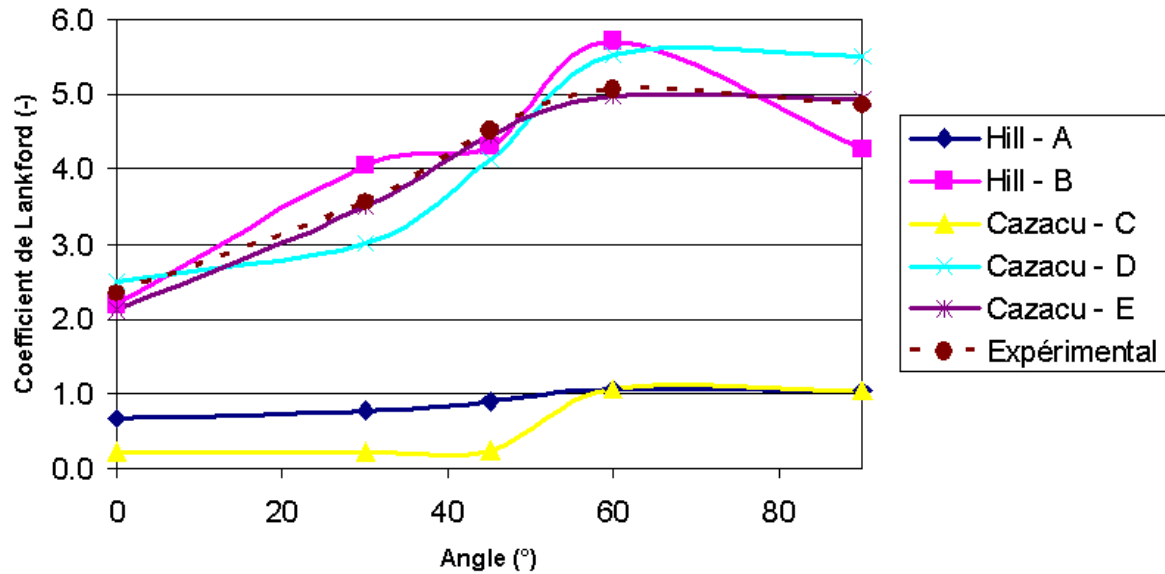


FIGURE IV.33 – Coefficient de Lankford en fonction de l'orientation par rapport à la direction de laminage pour les différents critères de plasticité identifiés.

autres stratégies d'identification tiennent compte dans leur procédure des valeurs expérimentales des coefficients de Lankford, et on retrouve numériquement des valeurs proches. La première conclusion que l'on peut tirer sur l'identification des critères de plasticité est la forte importance de la prise en compte des coefficients de Lankford dans la procédure de détermination des paramètres du critère. Omettre ces valeurs expérimentales pour la modélisation d'un matériau fortement anisotrope tel qu'un alliage de titane est fortement déconseillé pour obtenir une simulation numérique fiable.

#### IV.3.1.c Force de traction

Dans cette partie, la force de traction selon différentes orientations sera comparée entre les résultats numériques et expérimentaux. Pour permettre la comparaison entre les différentes modélisations, un même critère de plasticité sera utilisé pour toutes les simulations. En partant du principe théorique que la surface de plasticité identifiées sur le plus grand nombre d'observables représente la meilleur définition du comportement plastique, on utilisera le critère de Cazacu identifié sur tous les tests expérimentaux (stratégie E).

**Dans la direction de laminage** Afin de pouvoir comparer les différentes lois d'écroutissage identifiées précédemment, une simulation des essais de traction dans la direction de

laminage est effectuée. Les lois étant identifiées à partir de cette orientation, l'efficacité de chacune ne peut être déterminée dans une autre direction. La figure IV.34 compare les forces de traction issues des différentes simulations et la courbe expérimentale.

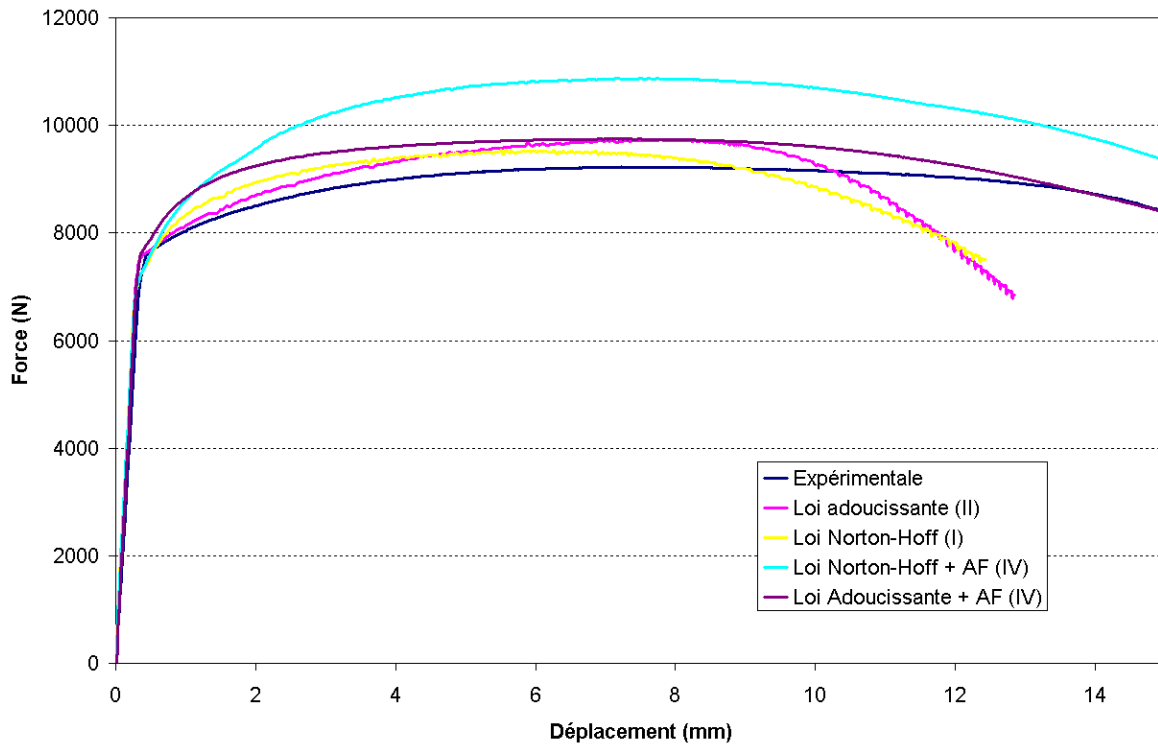


FIGURE IV.34 – Force de traction dans la direction de laminage, comparaison des lois d'écrouissage permettant la modélisation du comportement plastique du T40

Toutes les lois précédemment identifiées permettent une plus ou moins bonne représentation du comportement plastique de l'alliage de titane T40. Les lois ne prenant pas en compte l'écrouissage cinématique prédisent un meilleur résultat pour des faibles déplacements, mais la force tombe rapidement aux alentours de 10 mm de déplacement. Au contraire les lois combinant un écrouissage isotrope et cinématique permettent d'éviter cette chute. La loi adoucissante associée à une loi d'Armstrong-Frederick modélise convenablement le comportement du T40 de manière macroscopique tout au long de la transformation. On s'oriente donc vers cette modélisation pour permettre la simulation de la mise en forme des alliages de titane.

Ces tests ont été menés uniquement dans la direction de laminage, car dans les autres directions, du fait de la procédure d'identification des lois, on ne peut prédire correctement une courbe force déplacement en utilisant un écrouissage indépendante de la direction de sollicitation. Dans ce cas, une modélisation par une loi d'écrouissage dépendante de la direction d'orientation peut s'avérer utile.

**Dans les autres directions** La simulation des essais de traction suivant différentes orientations par rapport à la direction de laminage en utilisant une loi d'écrouissage simple ne permettent de prédire correctement les grandeurs associées aux directions autres que celle utilisé dans la procédure d'identification (Fig. IV.35).

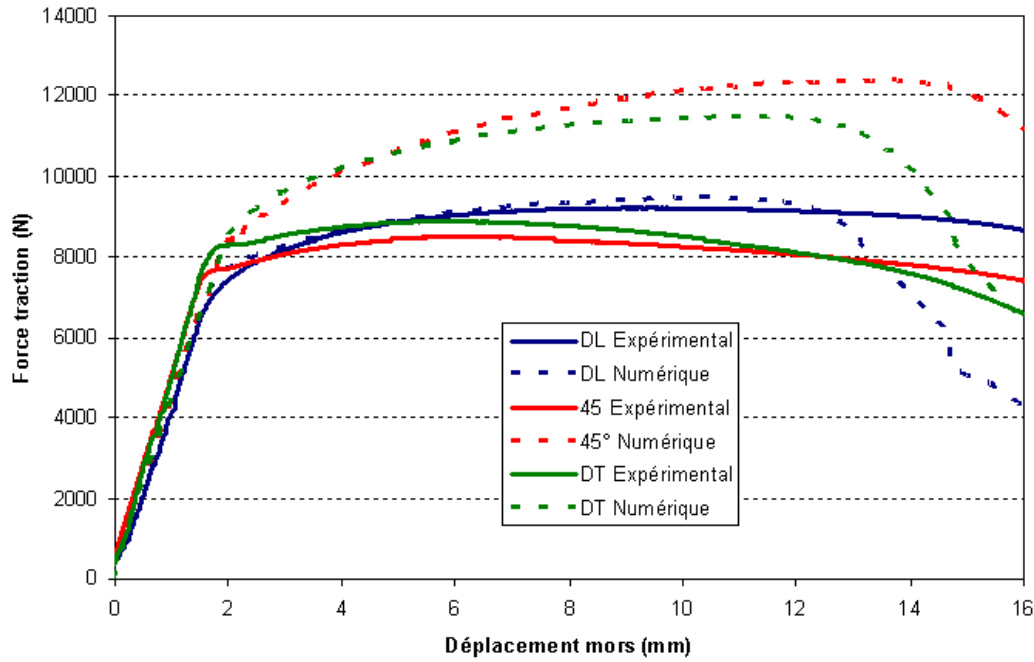


FIGURE IV.35 – Forces de traction dans plusieurs directions avec une loi d'écrouissage isotrope identifiée à partir de la direction de laminage

L'apport d'un écrouissage dépendant de l'orientation de la sollicitation est indéniable (Fig IV.36). On perd un peu de précision dans la direction de laminage, mais la prédiction dans les autres directions est beaucoup plus réaliste. Le croisement entre les efforts dans la direction de laminage et transverse observé expérimentalement est obtenu par la simulation pour un déplacement quasi-équivalent (6 mm de déplacement pour le résultat numérique contre 6,7 mm expérimentalement). L'intérêt d'un écrouissage dépendant de la direction de sollicitation est clairement démontré dans ce cas. Mais son identification implique l'utilisation d'un critère de plasticité anisotrope simple. Pour des alliages de titane, qui sont fortement anisotropes, un critère complexe doit être utilisé pour permettre une bonne prédiction à la fois des contraintes et des déformations plastiques.

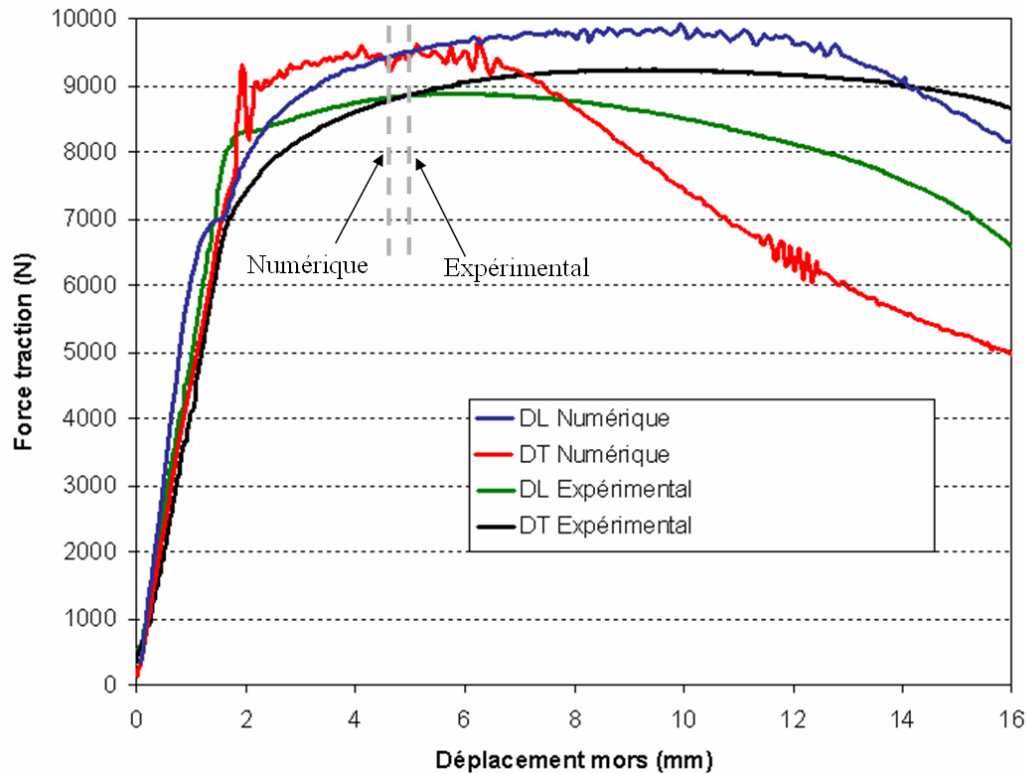


FIGURE IV.36 – Forces de traction dans plusieurs directions avec une loi d'écrouissage dépendante de l'orientation de la sollicitation

### IV.3.2 Simulation des essais de cisaillement simple

La simulation des essais de cisaillement simple va permettre de tester la réponse des différents critères de plasticité à une sollicitation en cisaillement. On utilisera une loi d'écrouissage combinant une partie isotrope modélisée par une loi adoucissante et une partie cinématique définie selon la loi d'Armstrong-Frederick, identifiée par la stratégie IV. Les comparaisons sur ce test seront donc les limites d'élasticité et les effets Bauschinger. La stratégie d'identification A du critère de Hill n'est pas testée sur les essais de cisaillement. En effet, les simulations de traction ont déjà montrées l'inefficacité d'une telle modélisation dans le cadre de matériaux fortement anisotropes tels les alliages de titane. Trois orientations différentes seront testées : il s'agit de la direction de laminage, la direction orientée à  $45^\circ$  et la direction transverse.

**Orientation dans la direction de laminage** Les données expérimentales dans la direction de laminage servent à l'identification de la loi d'écrouissage, à la fois isotrope avec les tests de traction et cinématique pour la modélisation de l'effet Bauschinger. Les

limites d'élasticité dépendent seulement du critère de plasticité utilisé. La figure IV.37 permet la visualisation des courbes contrainte/déformation issues des simulations de cisaillement simple avec un cycle de chargement permettant la mise en action de l'effet Bauschinger. Les limites d'élasticité et l'effet Bauschinger sont déterminés pour chaque critère de plasticité. (Tab. IV.28)

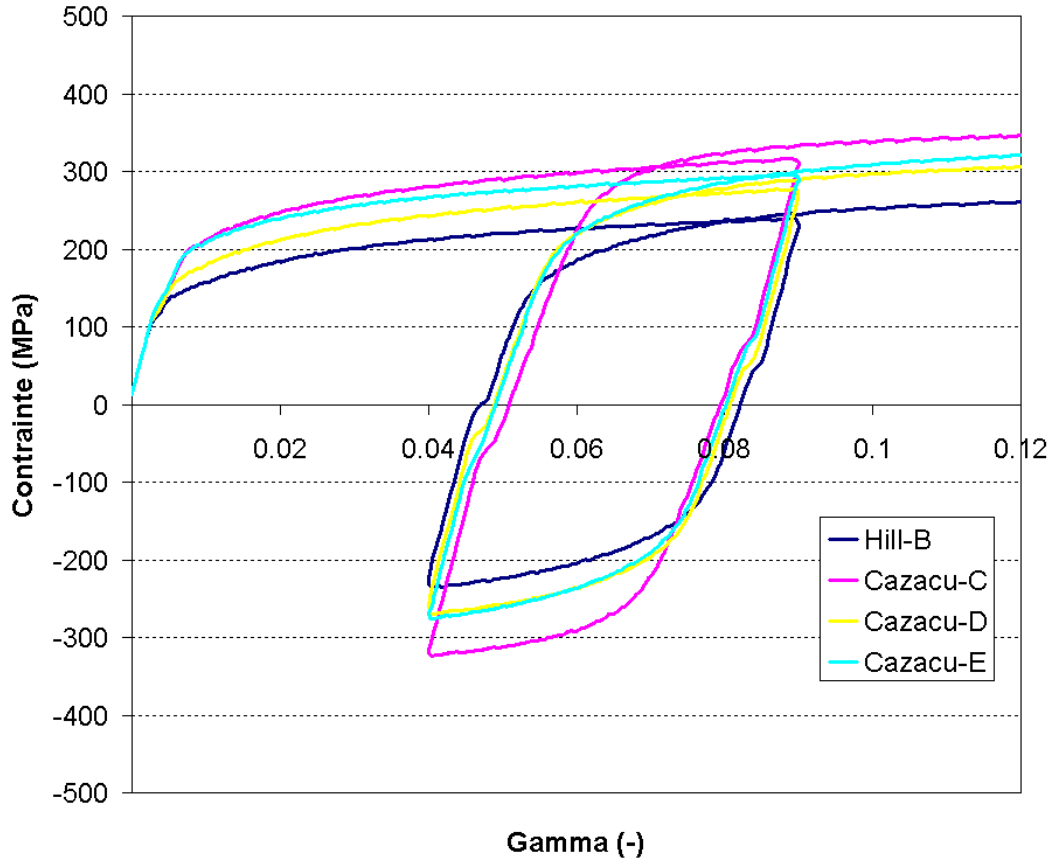


FIGURE IV.37 – Réponse de la simulation numérique au test de cisaillement simple : Courbe contrainte/Déformation

Les effets Bauschinger sont très bien prédits pour tous les critères de plasticité. Cette constatation permet de valider l'efficacité de la procédure d'identification de l'écrouissage combinant une loi adoucissante et une loi d'Armstrong-Frederick. Par contre, les limites d'élasticité sont différentes selon la modélisation de la surface de plasticité. Le critère de Hill, identifié sur les coefficients de Lankford, est incapable de prédire une valeur correcte. Les critères de Cazacu, notamment la stratégie C et E, donnent des valeurs proches de la valeur expérimentale. L'ajout de la prise en compte des coefficients de Lankford dans l'identification du critère de Cazacu, modifie grandement la réponse numérique lors du test de cisaillement simple par rapport à la stratégie d'identification C. Enfin, le critère de Cazacu dont les paramètres ont été déterminés grâce à une base expérimentale complète (Stratégie E) donne la meilleure réponse pour la limite

Critère	Limites d'élasticité (MPa)	Effet Bauschinger (-)
Hill - B	103	0,270
Cazacu - C	200	0,231
Cazacu - D	150	0,254
Cazacu - E	191	0,230
Expérimental	190	0.25

TABLE IV.28 – Simulation du test de cisaillement simple dans la direction de laminage : Limites d'élasticité et effets Bauschinger numériques

d'élasticité.

**Orientation dans une direction autre que la direction de laminage** La même étude a été réalisée pour des simulations du test de cisaillement simple, orientées à 45 ° par rapport à la direction de laminage (Tab. IV.29) et dans la direction transverse (Tab. IV.30).

Critère	Limites d'élasticité (MPa)	Effet Bauschinger (-)
Hill - B	178	0,234
Cazacu - C	227	0,270
Cazacu - D	185	0,264
Cazacu - E	198,5	0,241
Expérimental	205	0,23

TABLE IV.29 – Simulation du test de cisaillement simple orienté à 45 ° : Limites d'élasticité et effets Bauschinger numériques

Critère	Limites d'élasticité (MPa)	Effet Bauschinger (-)
Hill - B	150	0,301
Cazacu - C	209	0,150
Cazacu - D	200	0,204
Cazacu - E	183	0,184
Expérimental	180	0,17

TABLE IV.30 – Simulation du test de cisaillement simple dans la direction transverse : Limites d'élasticité et effets Bauschinger numériques

Les limites d'élasticité prédites par la simulation numérique sont les plus proches des données expérimentales pour le critère de Cazacu dont la stratégie d'identification tient compte de ces mêmes limites en cisaillement. Pour les autres stratégies, le critère de Hill identifié sur les coefficients de Lankford est déficient comparé aux critères de Cazacu. La capacité de ce dernier à prédire un comportement en cisaillement proche de la

réalité, quelque soit la procédure d'identification, lui confère un net avantage comparé aux critères quadratiques. Les effets Bauschinger observés numériquement dépendent fortement de la base utilisée lors de l'identification. Cependant, malgré une détermination des paramètres par rapport à la direction de laminage, le comportement dans les autres directions est prédit avec plus ou moins de justesse, mais un écrouissage cinématique est important pour obtenir une modélisation fiable du comportement plastique des alliages de titane, notamment une prise en compte correcte du retour élastique.

## IV.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, les modèles permettant la simulation du comportement plastique des alliages de titane ont été identifiés concernant les deux matériaux de l'étude : le T40 et le SSAT 350. Des essais permettant de fournir une base de données expérimentale, à savoir des essais de traction, de compression et de cisaillement simple, ont été réalisés par les différents membres du projet. Les limites d'élasticité en traction et les coefficients de Lankford ont été extraits des tests de traction uniaxiale, orientés différemment par rapport à la direction de laminage. Les tests de compression et les tests de cisaillement simple ont permis de déterminer les limites élastique du matériau suivant différentes sollicitations. De plus des essais inversés ont permis de caractériser l'effet Bauschinger de l'alliage T40.

A partir de cette base expérimentale, les paramètres des critères de plasticité, à savoir le critère de Hill et de Cazacu, ont été déterminés selon plusieurs stratégies. Concernant le critère de Hill, deux jeux de paramètres ont été obtenus, le premier en identifiant le critère sur les limites d'élasticité et le second en ne considérant que les coefficients de Lankford. Ces deux procédures sont les plus classiques pour quantifier une surface de plasticité au sens de Hill. Le critère de Cazacu a été identifiés suivant trois manières, chacune étant croissante dans le nombre de données expérimentales prises en compte : la première ne se base que sur les limites d'élasticité en traction uniaxiale, la seconde tient compte de l'ajout des coefficients de Lankford dans la construction de la surface et la dernière est basée sur l'optimisation de toutes les grandeurs expérimentales disponibles. Cette dernière n'a pu être effectuée que sur l'alliage T40, les essais sur l'alliage SSAT 350 n'étant pas disponibles. Différentes lois d'écrouissage, simples telles la loi de Norton-Hoff ou la loi adoucissante et des lois plus complexes, soit dépendantes de l'orientation de la sollicitation, soit combinant écrouissage isotrope et cinématique, ont été identifiées à partir de données expérimentales.

Les premières simulations de test à sollicitation simple tels la traction uniaxiale et le cisaillement simple ont permis d'effectuer les premières conclusions quand à l'efficacité des différentes modélisations. La comparaison des cartes de déformations plastiques et la détermination de coefficient de Lankford numérique a sérieusement mis en défaut les procédures d'identification ne tenant compte que des limites d'élasticité obtenues lors de tests de traction uniaxiale. Toutes les autres stratégies d'identification peuvent être utilisées, tout en sachant que chacune d'entre elles ne peut prédire correctement toutes les grandeurs. Un des intérêts de cette étude étant de comparer l'efficacité des critères de plasticité en rapport avec la difficulté d'identification, on gardera pour la suite toutes les stratégies d'identification tenant compte des coefficients de Lankford. Ainsi,



on pourra conclure sur l'apport d'un critère non quadratique par rapport à un critère de Hill, et déterminer l'influence de la stratégie d'identification sur le critère de Cazacu. Il est certain que la prédiction numérique sera meilleure avec une surface de plasticité tenant compte d'un maximum d'informations expérimentales, mais la comparaison entre la stratégie D (Limites d'élasticité + coefficient de Lankford) et la stratégie E (Base expérimentale complète) permettra de conclure sur l'utilité d'un critère plus complexe, mais identifié sur une base de données réduites.

Les premières conclusions ont pu être tirées sur l'identification des lois d'écrouissage. Les différentes simulations numériques font ressortir l'influence de la prise en compte d'un écrouissage cinématique dans la modélisation du comportement plastique des alliages de titane. Même si celui-ci n'est basé que sur des informations obtenues dans la direction de laminage, il permet d'obtenir des bonnes prédictions. L'utilité d'un écrouissage dépendant de la direction de laminage est démontrée sur les tests de traction, mais son identification est complexe et dépendante du critère de plasticité. D'où l'impossibilité de l'utiliser avec le critère de Cazacu. De plus, lors de simulation de procédés de mise en forme, peu de différences sur les efforts d'emboutissage ont été observées entre un écrouissage isotrope basé sur la direction de laminage et un écrouissage dépendant de la direction de sollicitation. Par la suite, la modélisation du comportement plastique des alliages de titane sera donc un écrouissage isotrope (loi adoucissante) combiné avec une loi d'Armstrong-Frederick permettant la prédiction des effets Bauschinger.

Les modèles de la formulation anisotrope ont été identifiés selon plusieurs stratégies dans ce chapitre. Cette étude concernant les procédés de mise en forme des produits plats, le prochain chapitre sera consacré à ceux-ci, notamment sur l'efficacité du critère de plasticité et de procédure d'identification basées uniquement sur des tests à sollicitation simple.

# Chapitre V

## Mise en forme à froid des alliages de titane

Le but de cette étude est la simulation de la mise en forme à froid des alliages de titane. Afin de valider la formulation anisotrope et la modélisation des matériaux, des essais de gonflage et d'emboutissage ont été réalisés au laboratoire. Le chapitre précédent a permis, à travers des simulations d'essais simples, d'écarter certaines méthodes d'identification donnant des résultats trop éloignés des observables expérimentales. Pour le critère de plasticité, on garde donc le critère de Hill identifié sur les coefficients de Lankford, et deux jeux de paramètres pour le critère de Cazacu, le premier déterminé à partir des limites d'élasticité et des valeurs des coefficients de Lankford en traction ; le second en ajoutant les observables obtenues en cisaillement et en compression. Concernant la loi d'écrouissage, une comparaison entre une loi simple de Norton-Hoff et un écrouissage combinant écrouissage cinématique et isotrope pourra être menée.

### V.1 La mise en forme à froid de l'alliage SSAT350

Le formage des alliages de titane à froid devait être étudié pour deux nuances d'alliage, le T40 et le SSAT 350. Les mêmes essais de mise en forme ont été réalisés sur ces deux matériaux. Au vu des échantillons déformés, l'alliage SSAT 350 n'est pas adapté, dans son état brut, à la mise en forme à froid. En effet, la rupture du matériau est observée pour des valeurs de déformations plastiques aux alentours de 10%, ce qui largement insuffisant pour permettre l'étude du comportement plastique. La formabilité de ce matériau est trop faible pour exploiter les essais mis en place, et son utilisation

à froid, sans traitement thermique préalable, ne peut permettre la réalisation d'emboutis profond. Pour la suite ce chapitre, on ne considérera donc que l'alliage de titane commercialement pur, à savoir le T40.

## V.2 Gonflage des alliages de titane

Des essais de gonflage hémisphérique et elliptique de tôles peuvent être réalisés au laboratoire. L'essai hémisphérique est à la fois un essai de caractérisation et de validation. D'une part il offre la possibilité d'identifier une courbe d'écrouissage qui couvre une grande plage de déformations, et d'autre part, il peut servir à déterminer le point limite en déformation équilibrée. Il est bien établi que l'essai de traction, classiquement utilisé dans la caractérisation des tôles, est limité par l'apparition de la striction diffuse. Cependant, en gonflage, la striction apparaît plus « tardivement » et la phase de déformation homogène est alors prolongée. Cependant l'identification de la loi d'écrouissage implique l'utilisation d'une modélisation théorique permettant la détermination du comportement plastique des alliages de titane.

### V.2.1 Essai de gonflage d'alliage de titane.

#### V.2.1.a Banc d'essai expérimental

Le banc de gonflage, présenté sur la figure [V.1](#), est composé de trois parties distinctes :

- L'unité de commande et d'acquisition assure à la fois le pilotage et l'acquisition des données de l'essai. Le procédé de formage est contrôlé uniquement en débit, la pression étant mesurée en temps réel par un capteur. Un système de corrélation d'images peut être mis en place sur le banc expérimental, à l'aide de deux caméras. Cependant, pour les alliages de titane, les pressions étant très élevées et la rupture du matériau très brutale, un tel système de mesure n'a pu être utilisé afin de ne pas détériorer le matériel.
- Le dispositif de fixation de la tôle au cours du gonflage (Fig. [V.2](#)). Il se compose d'un serre-flan et d'une matrice. Trois matrices sont disponibles pour solliciter l'échantillon selon différents chemins de déformation, une matrice hémisphérique et deux matrices elliptiques. Les dimensions des différents outils sont décrites dans la table [V.1](#).
- Le groupe hydraulique assure le serrage du serre-flan et le gonflage de la tôle.

Matrice	Hémisphérique	Elliptique 1	Elliptique 2
Grand axe	125 mm	125 mm	125 mm
Petit axe	125 mm	83 mm	42 mm
Rapport axe	1	1,5	3

TABLE V.1 – Dimension des inserts utilisables sur le banc de gonflage

Un premier circuit hydraulique haute pression sert à la fermeture du serre-flan, et maintient ainsi la tôle sur la matrice. L'effort de serrage maximal que peut atteindre la machine est de 104 tonnes. Une fois la tôle fixée, le deuxième circuit hydraulique entre en action, permettant l'injection du mélange eau/huile sous pression qui sert au gonflage de l'échantillon. Un surpresseur permet d'atteindre des pressions de gonflage suffisamment élevées (jusqu'à 700 bars).

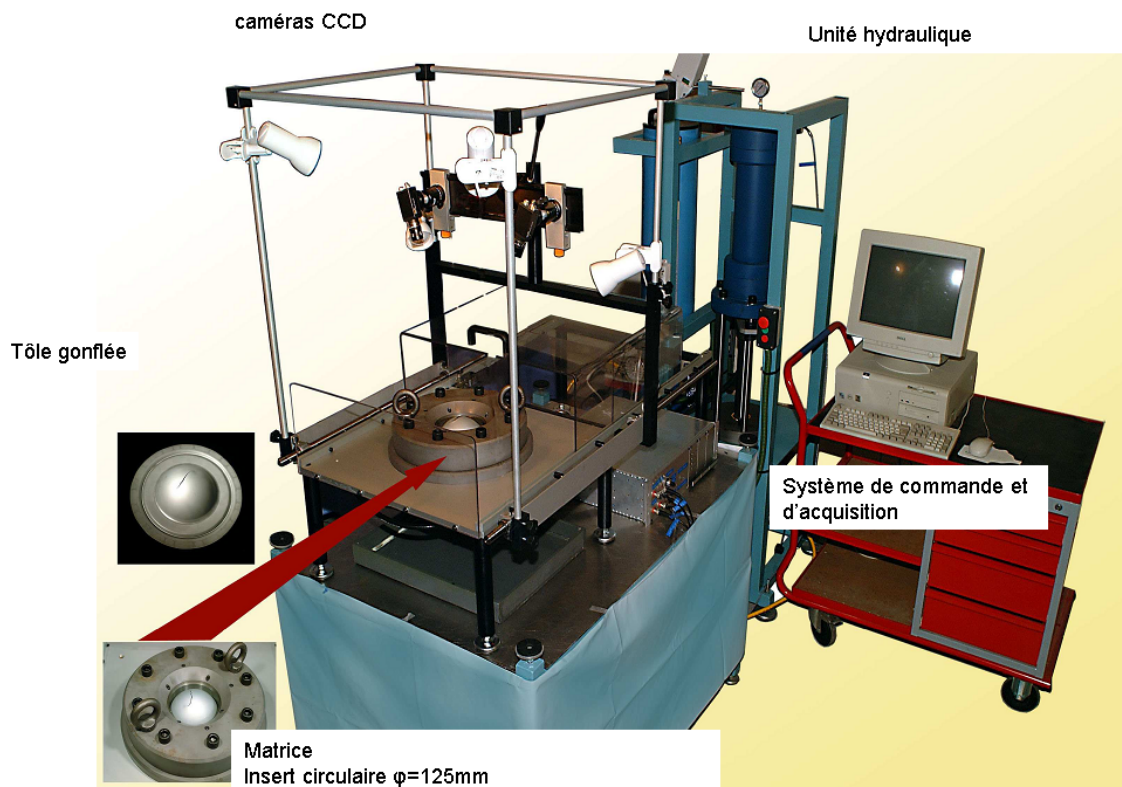


FIGURE V.1 – Vue d'ensemble du banc de gonflage

Le gonflage d'alliages de titane n'a pu être réalisé uniquement avec l'insert hémisphérique et l'insert elliptique dont le rapport des axes est le plus petit, les essais avec le dernier outil, à savoir une ellipse très allongée, ne sont pas exploitables du fait de l'état final de l'échantillon. La rupture de la tôle entraîne la dégradation totale de l'échantillon, et le marquage est fortement détérioré. Des mesures de champs sont réalisées, à

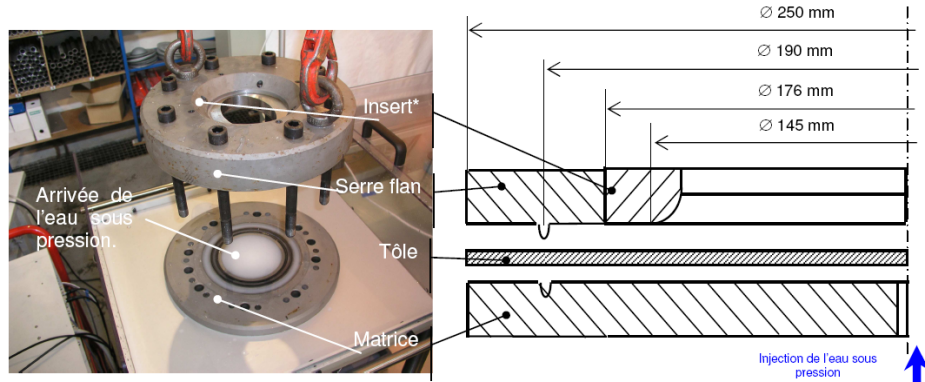


FIGURE V.2 – Montage du flan sur le banc de gonflage

partir d'une acquisition initiale et finale. Un motif aléatoire, soit réalisé par peinture ou par électrogravage de la tôle, est déposé sur la surface initiale. L'analyse de l'évolution des speckles permet la détermination des champs de déformation plastique, et ainsi permettre la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques. Les essais suivant ont donc été réalisés (Fig. V.3) :

- des essais de gonflage hémisphérique avec deux débits différents
- des essais de gonflage elliptique avec la direction de laminage située suivant le grand axe de l'ellipse avec deux débits différents
- des essais de gonflage elliptique avec la direction de laminage située à  $45^\circ$  par rapport au grand axe de l'ellipse avec deux débits différents
- des essais de gonflage elliptique avec la direction de laminage située à  $90^\circ$  par rapport au grand axe de l'ellipse avec deux débits différents

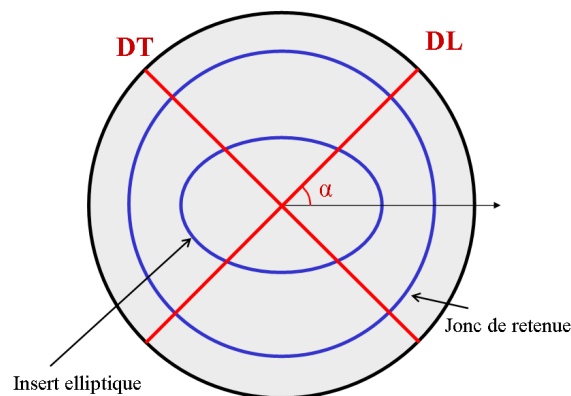


FIGURE V.3 – Mise en place de la tôle dans l'insert elliptique en fonction de la direction de laminage.

### V.2.1.b Résultats expérimentaux

Le dépouillement des essais de gonflage permet de connaître la pression de gonflage, le volume du mélange eau/huile injecté. De plus, les mesures de champs permettent la détermination des déformations plastiques équivalentes. Le gonflage hémisphérique permet, grâce à son exploitation analytique, de déterminer le comportement plastique du matériau. Les gonflages elliptiques permettront la comparaison des résultats expérimentaux avec les prédictions numériques. L'épaisseur initiale des tôles de titane T40 est de 1,6mm.

**i) Essai de gonflage hémisphérique** Des essais de gonflage hémisphérique ont été effectués pour deux débits différents,  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$  et  $4 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Dans un premier temps, la reproductibilité des essais est vérifiée à l'aide des courbes de pression en fonction du temps (Fig. V.4). Ce test permet de nous assurer du bon déroulement des essais.

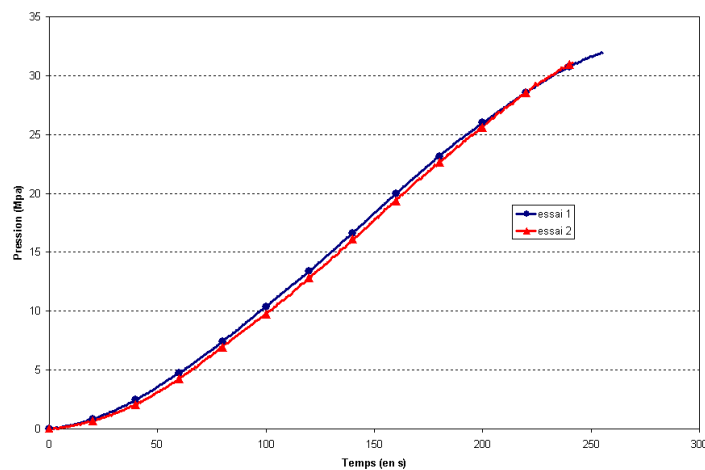


FIGURE V.4 – Évolution de la pression en fonction du temps pour le gonflage hémisphérique d'un alliage T40 avec un débit de  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

Dans un second temps, la sensibilité à la vitesse de l'alliage de T40 est étudiée par la modification du débit d'injection du fluide. Les courbes exprimant la pression en fonction du volume injecté (Fig. V.5), et les échantillons à l'état final permettent de conclure quant à l'influence de la vitesse lors de la mise en forme de ce matériau (Fig. V.6 et V.7).

La sensibilité du matériau à la vitesse, dans la plage correspondante à celle utilisée en mise en forme, est faible. La courbe V.5 décrit bien le peu d'influence de la vitesse sur l'alliage T40, la différence sur la fin des courbes s'explique par le fait que la bulle a été déformée jusqu'à rupture pour un débit de  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$  et non dans le cas de 4

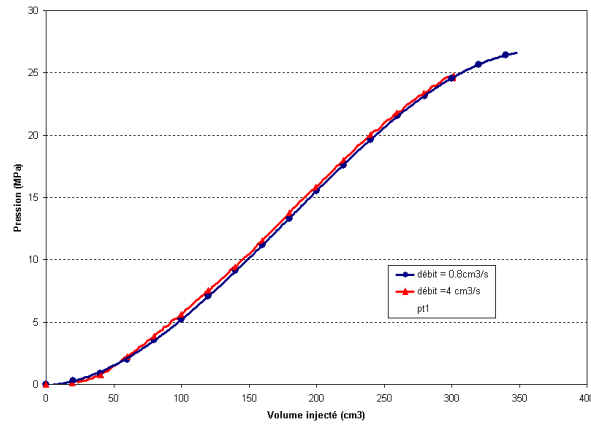


FIGURE V.5 – Évolution de la pression en fonction du volume injecté pour deux débits différents.

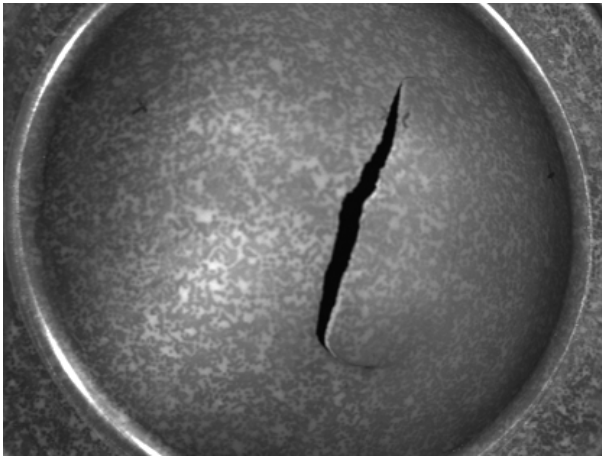


FIGURE V.6 – Tôle après un gonflage à un débit de  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

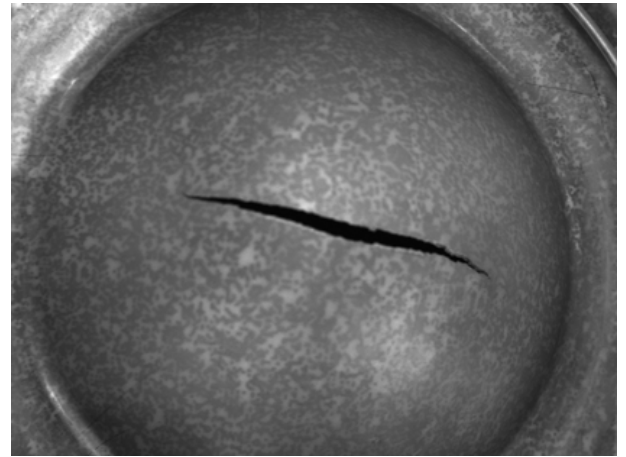


FIGURE V.7 – Tôle après un gonflage à un débit de  $4 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

$\text{cm}^3/\text{s}$ . L'étude visuelle des déformés après rupture des deux essais montre également des similitudes entre les deux échantillons. On retrouve une fissure dont la longueur est quasi-semblable, présentant un profil similaire notamment aux extrémités de celle-ci. Sur ce point-là, la sensibilité à la vitesse est aussi limitée, et joue seulement sur la netteté du profil de rupture.

**ii) Essai de gonflage elliptique** Les mêmes conclusions, que celles tirées précédemment, peuvent être établies, à savoir une bonne reproductibilité des essais (Fig. V.8) et une sensibilité à la vitesse faible (Fig. V.9). En effet, on remarque des petits effets de la vitesse sur la fin de gonflage de la bulle. L'augmentation du débit du volume injecté, donc de la vitesse de déformation, permet d'atteindre une pression plus élevée

avant la rupture de l'échantillon. Pour des hauteurs semblables (même volume injecté), des variations d'environ 2% sont observées pour les deux débits. Au vu des résultats précédents, la sensibilité à la vitesse de l'alliage T40 reste faible.

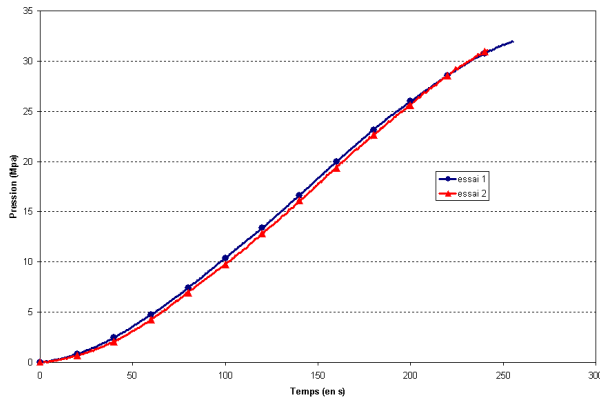


FIGURE V.8 – Évolution de la pression pour le gonflage hémisphérique d'un alliage T40 avec un débit de  $0,8\text{cm}^3/\text{s}$ .

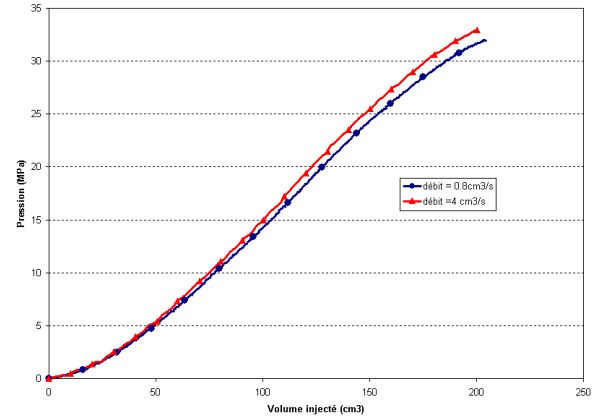


FIGURE V.9 – Évolution de la pression en fonction du volume injecté pour deux débits différents.

Le comportement anisotrope peut être observé par l'essai de gonflage elliptique, suivant la position initiale de la tôle. En faisant varier l'angle entre le grand axe de l'ellipse et la direction de laminage, on sollicite le matériau suivant des orientations différentes. Les courbes V.10 comparent la pression en fonction du volume injecté pour les différentes directions testées. Les différences sur des grandeurs macroscopiques comme la pression sont faibles, on remarque seulement une pression plus élevée pour le grand axe de l'ellipse orienté dans la direction de laminage et un volume injecté plus faible pour l'essai à  $45^\circ$ . L'information sur la quantité de fluide nécessaire au gonflage permet de considérer une hauteur de gonflage quasi-semblable. Les cartographies obtenues par corrélation d'images grâce au logiciel Aramis<sup>®</sup> permettront la comparaison avec les prédictions issues du calcul numérique.

L'étude visuelle des profils de rupture des échantillons permet l'observation de l'influence de l'orientation initiale de la direction de laminage. Les fissures (Fig. V.11), comme pour le gonflage hémisphérique, sont quasi-indépendantes de la vitesse de déformation. Pour une même orientation de la direction de laminage par rapport au grand axe de l'ellipse, la forme générale et les extrémités des fissures sont très proches. Les échantillons dont la direction de laminage est confondue avec le grand axe de l'ellipse cassent selon un profil rectiligne. Pour une orientation de  $45^\circ$ , les extrémités de la fissure tendent à s'orienter vers la direction de laminage, alors que le centre de la fissure reste dans la direction du grand axe. Et enfin, lorsque la direction transverse est coïncidente avec le grand axe de l'ellipse, la fissure redevient rectiligne, mais des profils



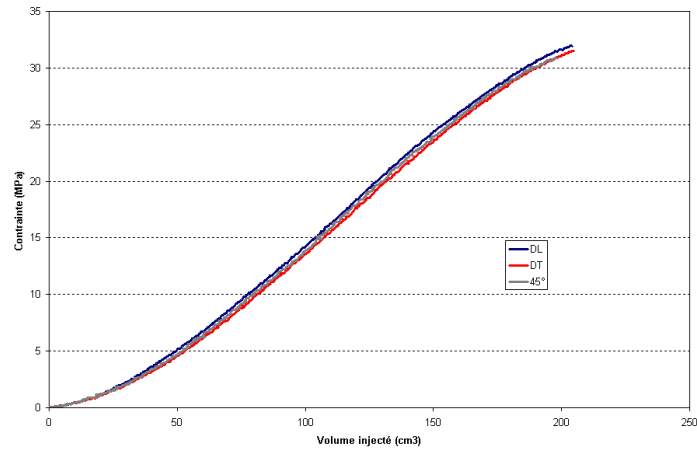
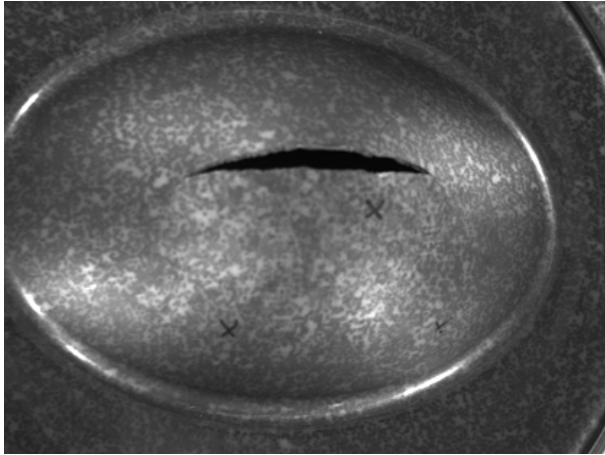


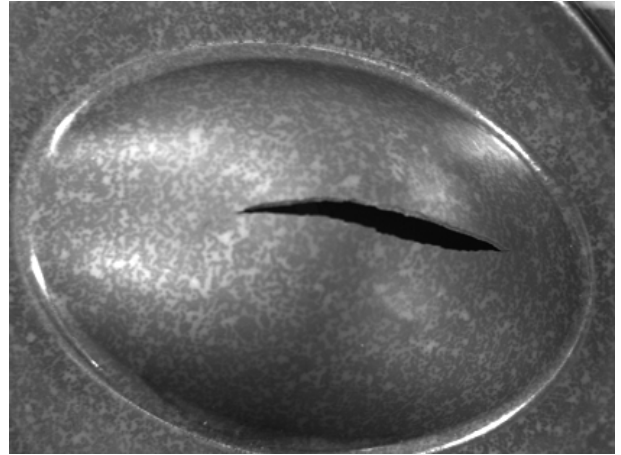
FIGURE V.10 – Évolution de la pression en fonction du volume injecté suivant l'orientation du grand axe de l'ellipse.

de rupture en « escalier » avec arrachement de matière sont observés. L'anisotropie de l'alliage T40 permet donc d'obtenir des profils de rupture différents, indépendants de la vitesse de déformation.

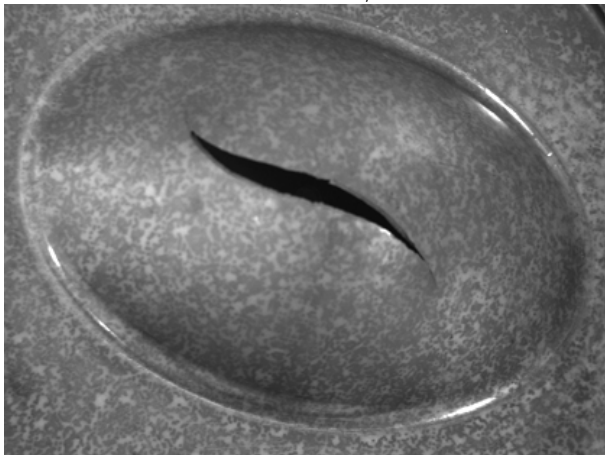
Orientation du grand axe de l'ellipse dans la direction de laminage  
débit =  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$



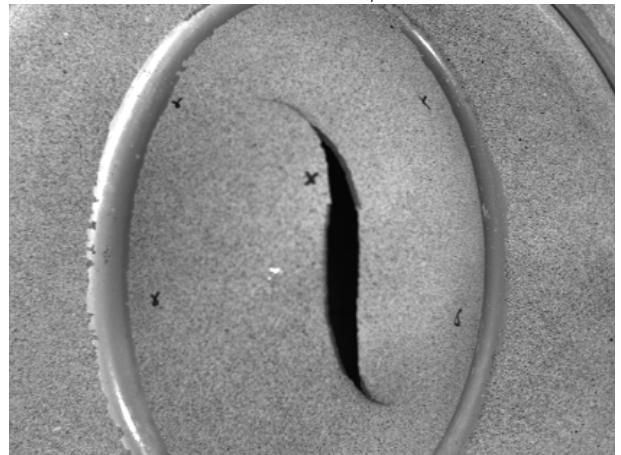
débit =  $4,0 \text{ cm}^3/\text{s}$



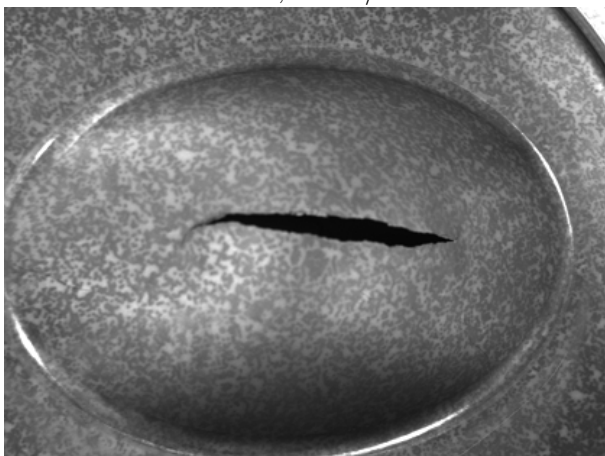
Orientation du grand axe de l'ellipse à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage  
débit =  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$



débit =  $4,0 \text{ cm}^3/\text{s}$



Orientation du grand axe de l'ellipse suivant la direction transverse  
débit =  $0,8 \text{ cm}^3/\text{s}$



débit =  $4,0 \text{ cm}^3/\text{s}$

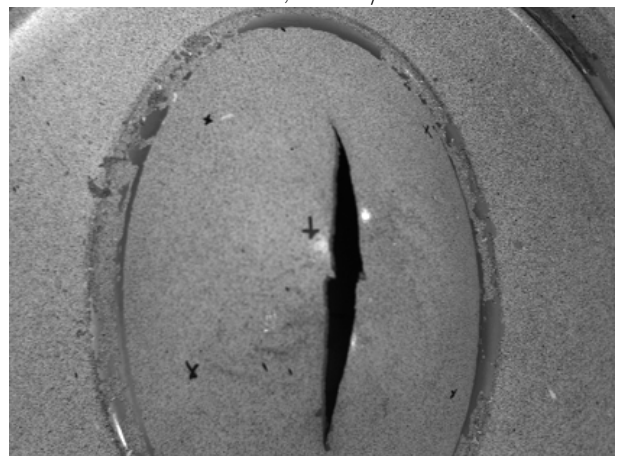


FIGURE V.11 – Profil de rupture en fonction de la position initiale de la tôle et de la vitesse de déformation

Les mesures de champs effectuées sur ces mêmes échantillons, notamment les cartographies de déformation plastique équivalente (Fig. V.12), permettent de confirmer l'influence du comportement anisotrope, et notamment l'importance de l'orientation initiale de la tôle pour le procédé de gonflage. Les valeurs des déformations plastiques équivalentes sont, sur le bord de la fissure, d'environ 0,322 dans le cas où le grand axe de l'ellipse coïncide avec la direction de laminage, de 0,45 pour une orientation à 45 ° et de 0,37 si la direction transverse est alignée avec le grand axe.

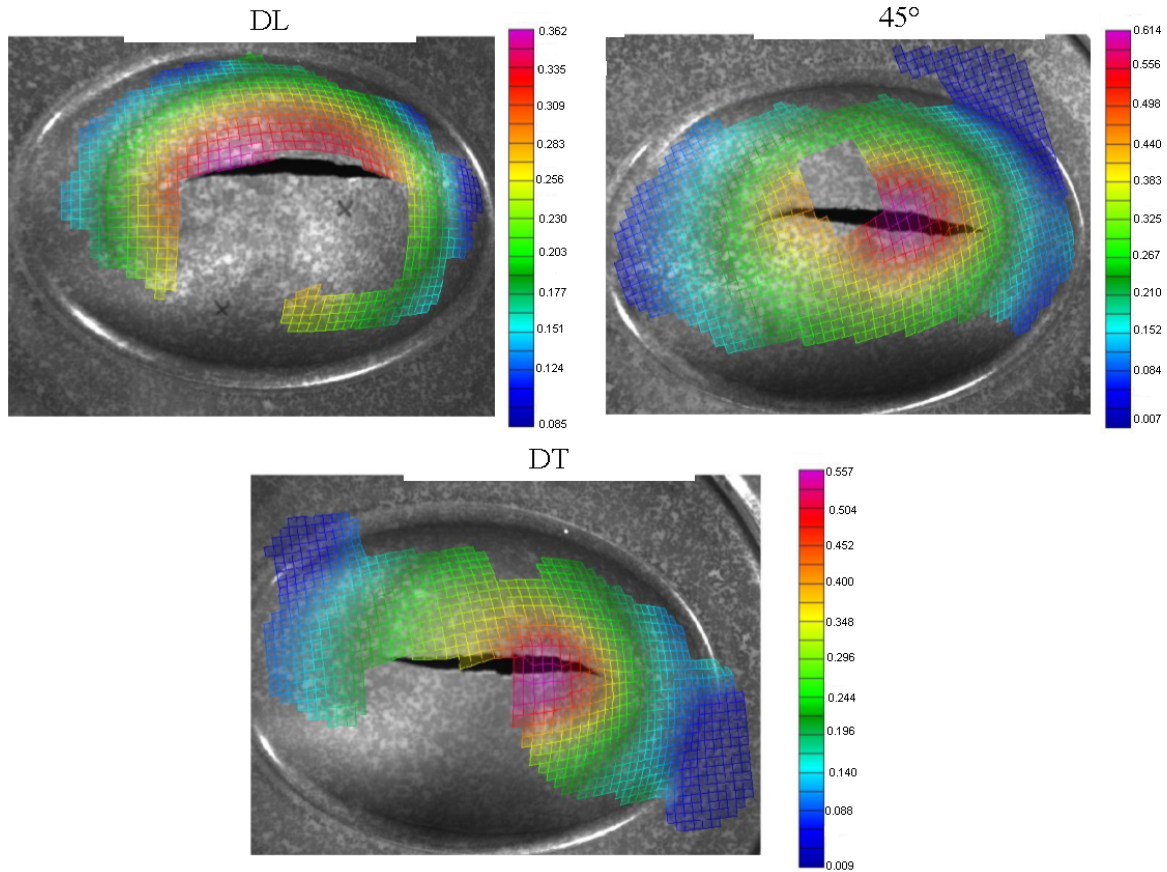


FIGURE V.12 – Cartes de déformation plastique équivalente obtenues par corrélation d'image

Les différences entrevues sur les déformations plastiques trouvent une explication dans l'analyse de l'essai de gonflage en s'appuyant sur les courbes de traction obtenues pour l'alliage T40 (Fig. IV.4). La forme elliptique de la matrice impose une déformation maximale suivant le petit axe et minimale suivant le grand axe. Pour atteindre une même hauteur au centre de la bulle, l'allongement est plus important suivant la plus petite direction que suivant la plus grande (Fig. V.13 ). La modélisation de la bulle par un profil elliptique permet de le prouver. La longueur de l'arc elliptique  $l_i$ ,  $i=a,b$  pour

une hauteur de gonflage de  $h$  peut être approximée par la formule suivante :

$$l_i = \frac{\pi}{4} \left[ 3 * (i + h) - \sqrt{(3i + h)(i + 3h)} \right], \quad (\text{V.1})$$

En introduisant les valeurs numériques de la géométrie de la matrice ( $a=125\text{mm}$ ,  $b=83\text{mm}$ ) pour une hauteur  $h=30\text{mm}$  dans l'équation V.1, on trouve un allongement de 12% suivant le petit axe de l'ellipse contre 6% suivant le grand axe.

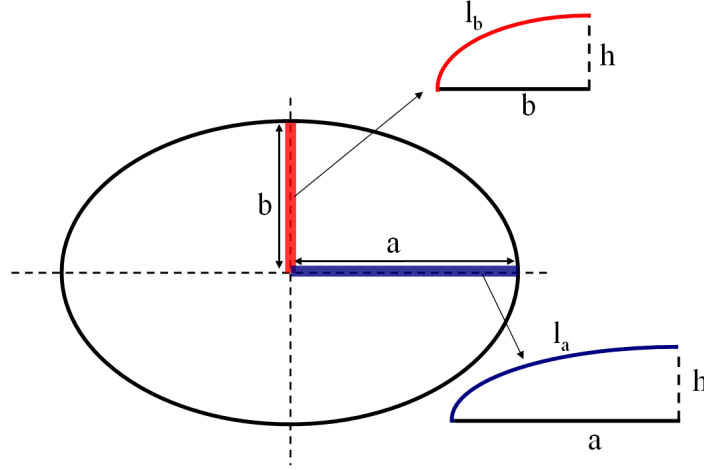


FIGURE V.13 – Schématisation des allongements sur les axes d'une ellipse pour l'essai de gonflage.

Lorsque la direction de laminage est orientée suivant le grand axe de l'ellipse, les déformations les plus importantes se situent donc dans le sens transverse. Or les essais de traction montrent que la plus petite ductilité est observée suivant la direction transverse. Ceci explique le fait que l'on obtienne les déformations plastiques les plus faibles. L'allongement atteint en traction étant légèrement supérieur suivant la direction de laminage, la déformation plastique maximale est plus élevée pour l'essai de gonflage où coïncident le grand axe et la direction transverse. Pour une orientation de l'échantillon à  $45^\circ$ , la déformation plastique atteinte est la plus grande. En effet, aucunes des deux directions les moins ductiles (DL, DT) ne se situent sur le petit axe de l'ellipse. D'où l'évolution de la déformation plastique en fonction de l'orientation initiale de la tôle.

La réalisation d'essais de gonflage hémisphérique et elliptique va permettre, d'une part de compléter la base de données expérimentale concernant le comportement plastique de l'alliage T40, et de comparer des cartes de déformations plastiques obtenues par mesures de champs aux prédictions numériques. Une étude analytique de l'essai de gonflage circulaire permet la détermination d'une loi d'écrouissage pour une plage de déformation plus large que celle obtenue par le test de traction uniaxiale.

### V.2.2 Modélisation analytique de l'essai de gonflage hémisphérique

A partir des données issues des essais expérimentaux, à savoir la pression et le volume de fluide injecté, la loi d'écroutissage isotrope peut être déterminée sur une plage de déformation plus large que celle balayée par les tests de traction uniaxiale. Dans un premier temps, une modélisation de la bulle doit être mise en place pour déterminer la hauteur atteinte en fonction du volume injecté. Ensuite, la loi d'écroutissage isotrope sera déterminée en fonction de la pression et de la hauteur de la bulle.

#### V.2.2.a Modélisation géométrique de la bulle

Pour pouvoir déterminer à chaque instant la hauteur du centre de la bulle, une modélisation géométrique est utilisée. Boulila *et al.* approxime le profil de la tôle gonflée par une calotte sphérique [Boulila02]. Une approximation du profil de la tôle par une ellipse est employée dans cette étude pour déterminer la hauteur de celle-ci à chaque instant. On considère une ellipse de grand axe  $R$  et de petit axe  $h$ , comme le décrit la figure V.14.

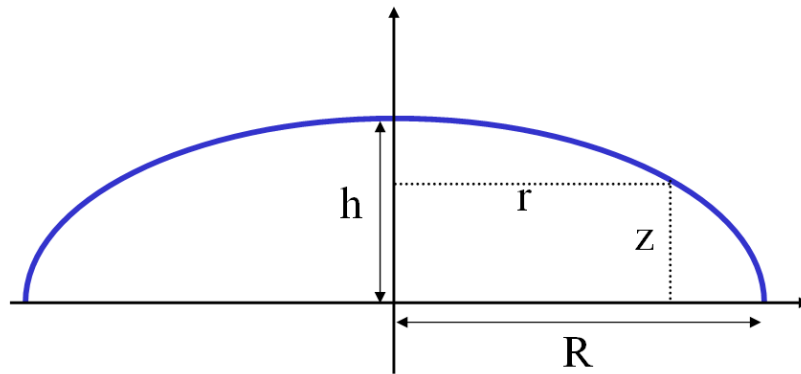


FIGURE V.14 – Modélisation du profil de gonflage hémisphérique par une ellipse

L'équation du profil de la tôle modélisée par une ellipse peut s'écrire :

$$\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1 \quad (\text{V.2})$$

Avec  $(r,z)$  les coordonnées du point,  $R$  le rayon de la matrice dont la valeur est 70 mm en tenant compte des rayons de congés présents sur les outils, et  $h$  la hauteur de la bulle gonflée. Le volume engendré par la rotation du profil elliptique autour de l'axe vertical

correspond au volume injecté lors du gonflage hémisphérique. On peut donc écrire la relation suivante permettant de lier le volume  $V$  à la hauteur  $h$  :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{3V}{2\pi R^2} \quad (\text{V.3})$$

A partir du volume injecté par la machine de gonflage, on peut estimer de manière analytique la hauteur de la bulle. La courbe V.15 représente l'évolution de la hauteur en fonction de la pression. Une analyse du même essai par corrélation d'images permet de déterminer la hauteur finale de la bulle (Fig. V.16). Les valeurs obtenues par le logiciel Aramis® nécessite un recalage de -4,1 mm (un déplacement non nul est observé sur la partie plane) dû au changement de coordonnée  $Z$  entre la mesure initiale et finale pour permettre la convergence du logiciel. Le modèle analytique indique une hauteur maximale de 29.4 mm contre 29.7 mm pour les mesures de champs, soit une erreur d'environ 1%.

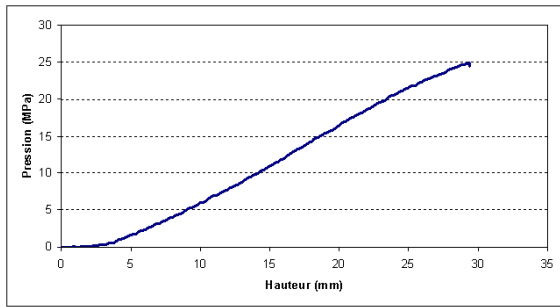


FIGURE V.15 – Evolution de la pression pour le gonflage hémisphérique en fonction de la hauteur de la bulle, obtenu par modélisation analytique.

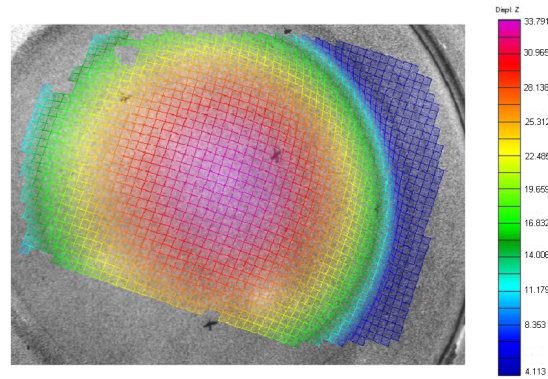


FIGURE V.16 – Déplacement selon l'axe vertical pour un essai de gonflage hémisphérique

La modélisation analytique de l'essai de gonflage hémisphérique par un profil elliptique permet de corréler le volume injecté à la hauteur de la bulle, nécessaire pour déterminer le comportement plastique de l'alliage T40 à partir de cet essai.

### V.2.2.b Modélisation mécanique de l'essai de gonflage hémisphérique

Dans le cas d'un comportement isotrope, le gonflage hémisphérique permet d'obtenir des états de contraintes et de déformations équi-biaxiaux. La modélisation de l'essai par un comportement anisotrope implique de faire une hypothèse de départ : soit on suppose que le comportement mécanique correspond à un état de contraintes équi-biaxiaux, soit

à un état de déformations équi-biaxiales. L'analyse d'un essai de gonflage hémisphérique par corrélation d'images va permettre de choisir l'hypothèse la mieux adaptée. Pour un hauteur de la bulle d'environ 30 mm, équivalent à une déformation plastique maximale de 0,28, les valeurs principales des déformations sont quasi-semblables : 0,208 contre 0,201. Le choix d'un état de déformations équi-biaxiales comme hypothèses de départ parait le plus approprié.

L'équilibre d'une bulle non sphérique est caractérisé par l'équation de Laplace :

$$\frac{p}{e} = \frac{\sigma_I}{R_\theta} + \frac{\sigma_{II}}{R_\phi} \quad (\text{V.4})$$

Avec  $p$  la pression de gonflage,  $e$  l'épaisseur de la tôle,  $R_\theta$  et  $R_\phi$  les rayons de courbures suivants les deux directions. On suppose les rayons de courbure égaux ( $R_\theta = R_\phi = \rho$ ), et le rapport des contraintes  $\Omega$  est défini par :

$$\Omega = \frac{\sigma_I}{\sigma_{II}} \quad (\text{V.5})$$

L'équation [V.4](#) permet de déterminer la contrainte principale  $\sigma_I$  :

$$\sigma_I = \frac{p\rho}{(1 + \Omega)e} \quad (\text{V.6})$$

La déformation principale au sommet de la bulle est définie en fonction du rayon de la matrice hémisphérique  $R$  par :

$$\epsilon_I = \ln\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right) \quad (\text{V.7})$$

L'incompressibilité plastique permet de déterminer l'épaisseur à chaque instant au sommet de la bulle :

$$e = e_0 \exp\left(-2\ln\left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)\right) \quad (\text{V.8})$$

La réécriture du critère de Hill en supposant un état de contraintes planes permet de lier la contrainte équivalente  $f(\boldsymbol{\sigma})$  à la contrainte principale  $\sigma_I$  :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sqrt{r_{90}(1 + r_0) - 2r_0r_{90}\Omega + r_0(1 + r_{90})\Omega^2}}{\sqrt{r_{90}(1 + r_0)}} \sigma_I \quad (\text{V.9})$$

La déformation équivalente  $\bar{\epsilon}$ , supposant un état de déformations équi-biaxiales, s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{r_{90}(1 + r_0) - 2r_0r_{90} + r_0(1 + r_{90})}}{\sqrt{r_0 + r_0r_{90} + r_0^2}} \epsilon_I \quad (\text{V.10})$$



Medhi Ben Tahar [Tahar05] a établi la relation liant la pression et la hauteur à la déformation équivalente en considérant une anisotropie transverse, régie par le paramètre  $\bar{r}$ , obtenu à partir des coefficients de Lankford  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  :

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (\text{V.11})$$

Dans ce cas, on suppose un comportement isotrope dans le plan de la tôle, donc un état de contraintes équi-biaxiales ( $\Omega = 1$ ). La relation reliant la pression à l'écoulement s'obtient par l'introduction de la contrainte équivalente (équation V.9) et de l'épaisseur (équation V.8) dans le calcul de la pression (équation V.6) :

$$P = \sqrt{2(1 + \bar{r})} \frac{e}{\rho} f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{V.12})$$

Cependant l'hypothèse d'anisotropie transverse ne peut être appliquée pour une forte anisotropie, ce qui est le cas du titane, dont le coefficient  $\bar{r}$  équivaut à 4,06. les paramètres  $\Omega$  et  $\beta$  représentent respectivement le rapport des contraintes et déformations principales :

La contrainte équivalente et la déformation équivalente peuvent s'écrire indépendamment de l'hypothèse choisie :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{P} \sigma_b \quad \bar{\epsilon} = \tilde{Q} \epsilon_{III} \quad (\text{V.13})$$

$$\sigma_b = \frac{P \rho}{e_0 e^{-\epsilon_{III}}} \quad (\text{V.14})$$

$$\tilde{P} = \frac{\sqrt{r_{90}(1 + r_0) - 2r_0 r_{90} \Omega + r_0(1 + r_{90}) \Omega^2}}{\sqrt{r_{90}(1 + r_0)(1 + \Omega)^2}} \quad (\text{V.15})$$

Avec  $\sigma_b$  la contrainte analytique de gonflage. Les expressions de la déformation équivalente et de la contrainte équivalente, déterminé à l'aide du critère de Hill, associé à la loi de normalité permet d'exprimer la valeur du coefficient  $\Omega$  [Tahar05] :

$$\Omega = \frac{r_{90}(1 + 2r_0)}{r_0(1 + 2r_{90})} \quad (\text{V.16})$$

La valeur numérique de  $\Omega$  est de 1,10 pour l'alliage T40, ce qui confirme que la prise en compte d'un état d'anisotropie transverse n'est pas suffisant. Le principe d'équivalence du travail oblige les fonctions  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  à vérifier :

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\tilde{P}} \quad (\text{V.17})$$

L'introduction de la valeur de  $\Omega$  (équation V.16) dans l'expression de  $\tilde{P}$  (équation V.15) permet de déterminer :

$$\tilde{P} = \frac{\sqrt{r_0 + r_0 r_{90} + r_0^2}}{\sqrt{(1 + r_0)(r_0 + 4r_0 r_{90} + r_{90})}} \quad \tilde{Q} = \frac{\sqrt{(1 + r_0)(r_0 + 4r_0 r_{90} + r_{90})}}{2\sqrt{r_0 + r_0 r_{90} + r_0^2}} \quad (\text{V.18})$$



Cette méthode est appliquée à l'alliage de titane T40 avec  $\tilde{P} = 0,32$  et  $\tilde{Q} = 1,51$ . La figure V.17 permet la comparaison entre le comportement mécanique observé en traction et en gonflage hémisphérique.

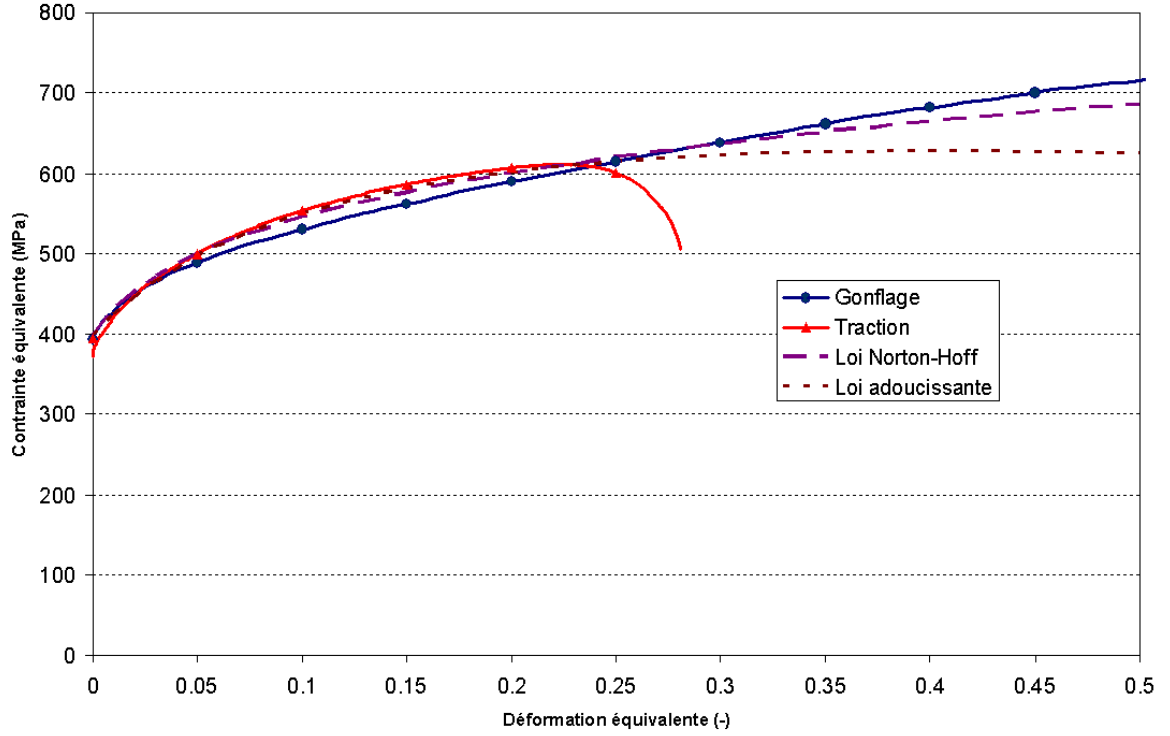


FIGURE V.17 – Comportement plastique de l'alliage T40 obtenu en traction et en gonflage

Le gonflage hémisphérique permet donc une exploration plus large des déformations plastiques. Les lois de comportement identifiées sur l'essai de traction ne reproduisent pas exactement le comportement plastique du T40 pour un essai de gonflage hémisphérique. L'ajout d'un terme d'adoucissement dans la loi d'écrouissage permet une meilleure modélisation du comportement en traction, mais perturbe la représentation du comportement plastique en gonflage. Une hiérarchie entre les différentes lois peut être établie, les lois de Norton-Hoff présentant une représentation du comportement du matériau plus précise. Ce modèle analytique permet de vérifier la validité d'une loi de comportement identifiée sur un essai de traction pour la modélisation d'un essai de gonflage. Cependant, les modèles utilisés dans la suite resteront ceux identifiés au chapitre IV, le test de traction étant le plus couramment utilisé et les modèles analytiques reposent sur des hypothèses lourdes. La loi de Norton-Hoff offre un bon compromis pour la représentation du comportement en traction et en gonflage de l'alliage T40.

### V.2.3 Simulation de l'essai de gonflage hémisphérique

L'essai de gonflage hémisphérique est simulé numériquement, afin de permettre une première comparaison de l'efficacité de la modélisation de l'alliage de titane T40. Le comportement plastique est caractérisé par une loi d'écrouissage isotrope de type Norton-Hoff associée à un écrouissage cinématique de type Armstrong-Frederick, dont les paramètres identifiés sont résumés dans la table IV.23. Les critères de plasticité testés dans cette configuration sont le critère de Hill identifié avec les coefficients de Lankford (Hill - B), le critère de Cazacu tenant compte de ces mêmes coefficients, ainsi que les limites d'élasticité en traction (Cazacu - D) et enfin le critère de Cazacu déterminé à partir de tous les observables expérimentales (Cazacu - E). La condition aux limites permettant la réalisation de la simulation de gonflage est une pression imposée sur la face inférieure du flan, déduite de l'essai expérimental. Les grandeurs permettant de comparer les modèles choisis précédemment seront la hauteur de la bulle, le champ de déformation plastique équivalente et les épaisseurs pour deux niveaux de déformation différents. Dans un premier temps, les simulations numériques seront comparées avec une tôle gonflée jusqu'à la hauteur de 29,7 mm. La table V.2 résume les différentes valeurs obtenues pour la hauteur, la déformation plastique et la réduction d'épaisseur entrevue au centre de la bulle.

Modélisation	Hauteur (mm)	Déformation plastique	Épaisseur (mm)
Hill - B	31,62 (6.5%)	0,366 (35%)	1,1621 (3%)
Cazacu - D	27,39 (7%)	0,249 (10%)	1,27 (5,8%)
Cazacu - E	29,23 (1.5%)	0,288 (3%)	1,21 (0,8%)
Mesure de champs	29,7	0,279	1,20

TABLE V.2 – Récapitulatif des grandeurs obtenues par la prédiction numérique pour une hauteur de 29.7 mm

A la vue des résultats obtenus par la prédiction numérique, le critère de Hill (Hill-B) est le plus éloigné des valeurs expérimentales, surestimant la hauteur atteinte pour une pression donnée et donc la déformation plastique équivalente. Cependant, les résultats numériques restent satisfaisants pour les trois modèles. Le critère de Cazacu identifié à partir des coefficients de Lankford et des limites d'élasticité en traction (Cazacu-D) donne des grandeurs proches des valeurs expérimentales. Cependant, ce modèle sous-estime légèrement la hauteur et la déformation plastique. Le critère de Cazacu déterminé à partir de tous les observables (Cazacu-E) prédit des résultats très proches des mesures de champs obtenues expérimentalement. La figure V.18 permet la comparaison des cartes de déformations plastiques obtenues avec les différents critères de plasticité et la cartographie expérimentale, la direction de laminage étant tracée en pointillés.

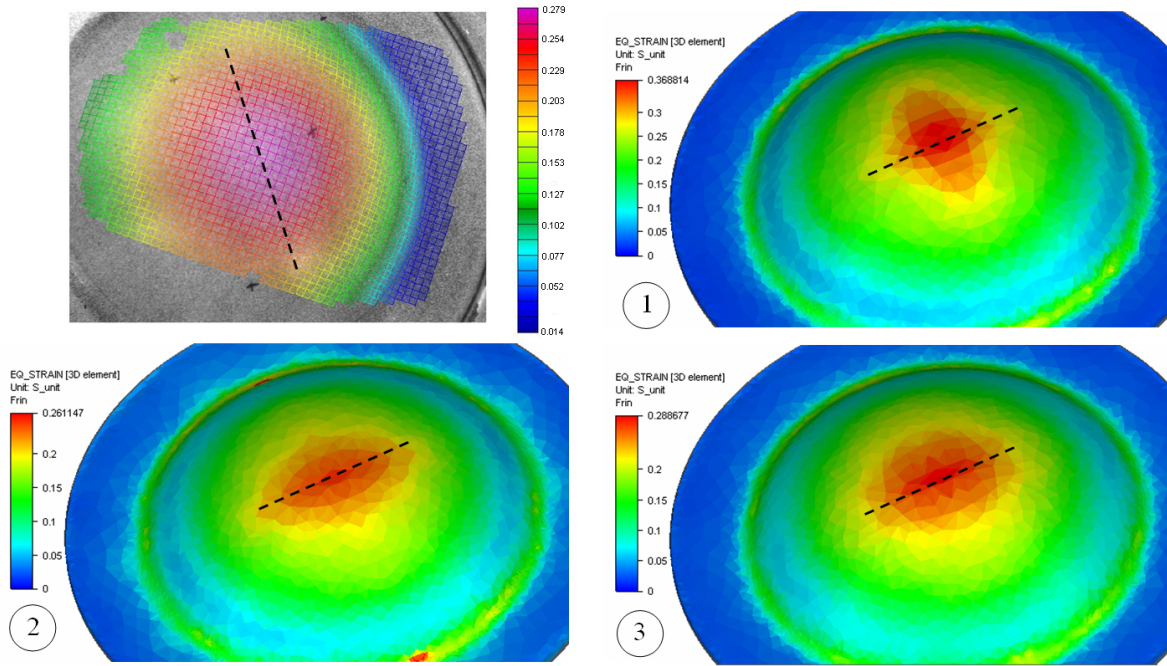


FIGURE V.18 – Cartographie des déformations plastiques équivalentes : 1 - Hill B / 2 - Cazacu D / 3 - Cazacu E (La direction de laminage est tracée en pointillés)

La carte des déformation plastique, obtenue expérimentale, présente un légère ovalisation, dont le grand axe est orienté suivant la direction de laminage de la tôle. On retrouve cette orientation lors de l'utilisation du critère de plasticité de Cazacu. Avec ce critère non quadratique, cette localisation de déformation est légèrement plus marquée. Le critère de Hill ne permet pas la prédiction de cette zone, du fait qu'il est quadratique. La comparaison de ces mêmes résultats pour la rupture de la bulle permet de confirmer les constations effectuées précédemment (Tab. V.3).

Modélisation	Hauteur (mm)	Déformation plastique	Épaisseur (mm)
Hill - B	39,09 (18%)	0,76 (65%)	0,81 (1,2%)
Cazacu - D	31,60 (7%)	0,40 (12%)	1,13 (41%)
Cazacu - E	34,84 (2,7%)	0,49 (6,7%)	0,99 (23%)
Mesure de champs	33,92	0,459	0,80

TABLE V.3 – Récapitulatif des grandeurs obtenues par la prédiction numérique pour la rupture de la bulle hémisphérique

Le tracé des cartographies des déformations plastiques équivalentes (Fig. V.19) montre bien la prise en compte de la localisation des déformations, orientée selon la direction de laminage. La photographie de l'échantillon expérimental confirme ce phénomène par l'apparition d'une fissure orienté dans cette même direction. Comme dans l'exemple précédent, le critère de Hill n'arrive pas à prédire cette zone, fortement locale.

Les limites d'un tel critère, qui reste très performant pour la modélisation des aciers, sont entrevues pour son utilisation dans le cadre de l'alliage T40, fortement anisotrope.

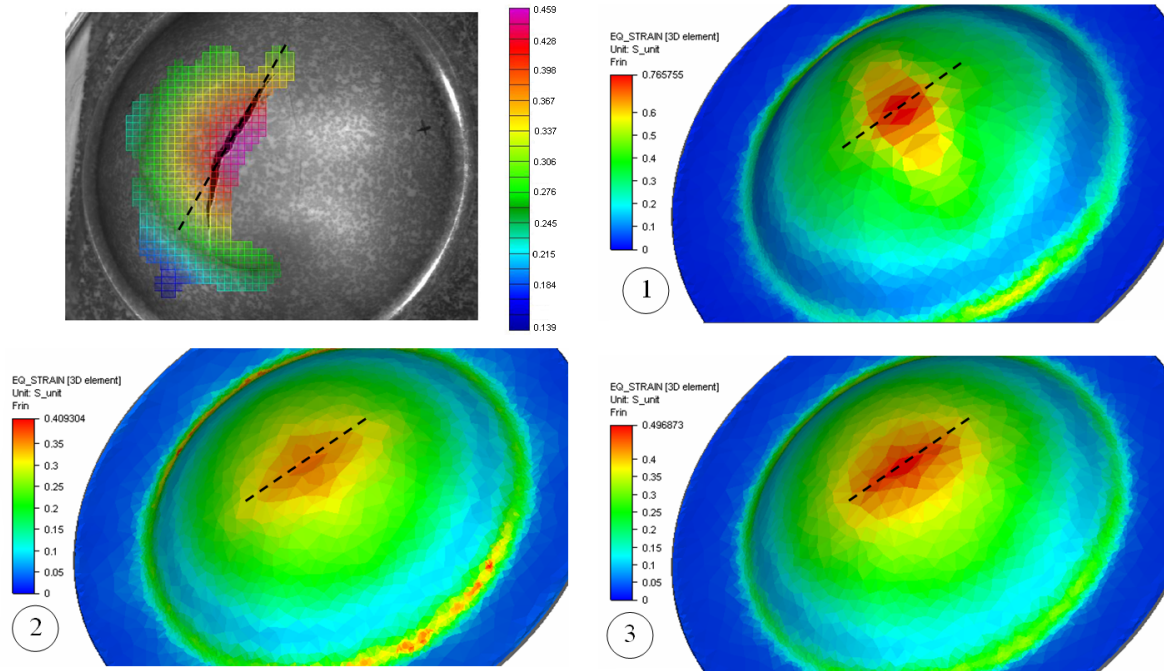


FIGURE V.19 – Cartographie des déformations plastiques équivalentes : 1 - Hill B / 2 - Cazacu D / 3 - Cazacu E (La direction de laminage est tracée en pointillés)

L'essai de gonflage hémisphérique permet une vérification de la justesse des modèles d'écrouissage identifiés sur le test de traction uniaxiale, car il balaye une plus large plage de déformation plastique. L'ajout d'une fonction d'adoucissement dans la loi d'écrouissage isotrope optimise l'essai de traction, mais la prédiction s'écarte assez nettement du comportement obtenu en gonflage hémisphérique pour l'alliage T40. L'intérêt de cette étude étant la modélisation et la simulation de la mise en forme de tôles d'alliage de titane, le modèle de comportement plastique utilisé par la suite sera donc une combinaison entre la loi de Norton-Hoff et la loi d'Armstrong-Frederick. Les essais de gonflage sont complétés par des essais de gonflage elliptique, où l'orientation de la direction de laminage varie.

#### V.2.4 Simulation de l'essai de gonflage elliptique

Les simulations numériques de gonflage elliptique vont pouvoir déterminer l'efficacité des critères de plasticité à prédire correctement un procédé plus complexe que le gonflage hémisphérique. L'influence de la position initiale de la tôle sur les champs des grandeurs mécaniques a été montrée précédemment.

**Orientation initiale à  $0^\circ$**  Dans un premier temps, la direction de laminage est confondue avec le grand axe de l'ellipse. Les cartes de déformations plastiques équivalentes obtenues à partir des différents modèles sont comparées avec celles déterminées à partir des mesures de champs (Fig. V.20).

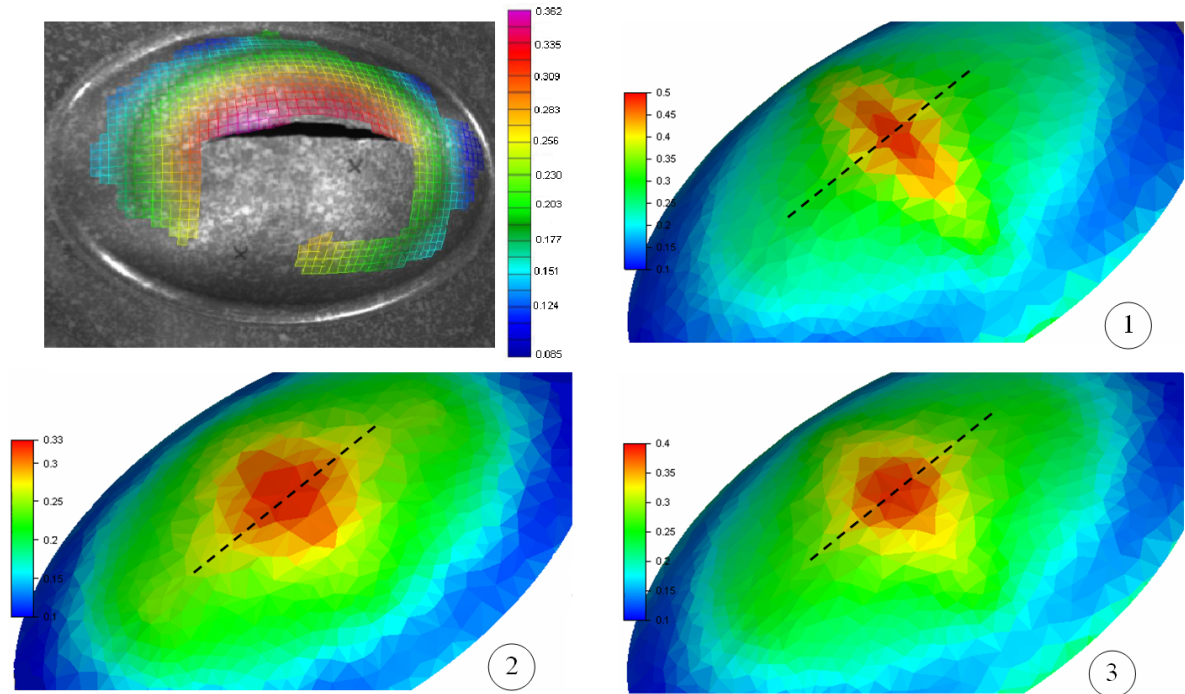


FIGURE V.20 – Cartographie des déformations plastiques équivalentes avec la direction de laminage (en pointillés) orientée selon le grand axe de l'ellipse : 1 - Hill B / 2 - Cazacu D / 3 - Cazacu E

L'étude des champs de déformation plastique montre concrètement l'avantage du critère de Cazacu dans la prédiction de la déformation plastique équivalente. Ce dernier permet une localisation dans la direction de laminage, orientation dans laquelle se propage la fissure, contrairement au critère de Hill, qui lui décrit une plus grande déformation plastique selon le plus petit axe de l'ellipse. Concernant les valeurs prédites par les modèles, le plus proche résultat est obtenu par le critère de Cazacu, identifié sur tous les observables (Cazacu-E). La seconde stratégie d'identification du critère de Cazacu (Cazacu-D) sous-estime ces valeurs, tandis que le critère de Hill (Hill-B) les surestime dans la zone de localisation. Hors de cette zone, tous les modèles permettent une bonne estimation de la déformation plastique équivalente. La deuxième grandeur étudiée est l'épaisseur de la tôle aux alentours de la fissure. Expérimentalement, une réduction d'épaisseur de 40%, soit 1,07 mm, est déterminée par corrélation d'images. Numériquement, le critère de Hill (Hill-B) prédit la valeur d'épaisseur la plus proche avec 1,01 mm, soit 5,68% d'erreur. Le critère de Cazacu, déterminé avec le plus d'observables expérimentales (Cazacu-E), estime cette dernière à 1,18 mm, soit environ 10%



de différence. Ce même critère identifié seulement à partir des coefficients de Lankford et des limites d'élasticité en traction (Cazacu-D) donne une épaisseur de 1,25mm, soit une erreur de 22%.

**Orientation initiale à 90 °** Dans les simulations numériques suivantes, l'orientation initiale de la direction de laminage est située selon le petit axe de l'ellipse. La comparaison des cartes de champs de déformation (Fig. V.21) permet de tirer les mêmes conclusions que dans le cas précédent, à savoir la prédiction de la localisation par le critère de Cazacu. Les valeurs de la déformation plastique équivalente estimées par la simulation numérique sont comprise entre 0,32 et 0,40 selon le modèle utilisé, et représente bien l'essai expérimental en dehors de la zone de localisation. L'épaisseur de la tôle prédite par le calcul élément finis est respectivement de 1,09 mm pour le critère de Hill, 1,14 mm pour le critère de Cazacu identifié uniquement à partir des coefficients de Lankford et des limites d'élasticité (Cazacu-D) et 1,19 mm pour le critère de Cazacu tenant compte de tous les observables (Cazacu-E) contre 1,12 mesurée expérimentalement par mesure de champ. Les erreurs effectuées par la simulation numérique sont assez faibles (moins de 7%), et les prédictions numériques sont convenables.

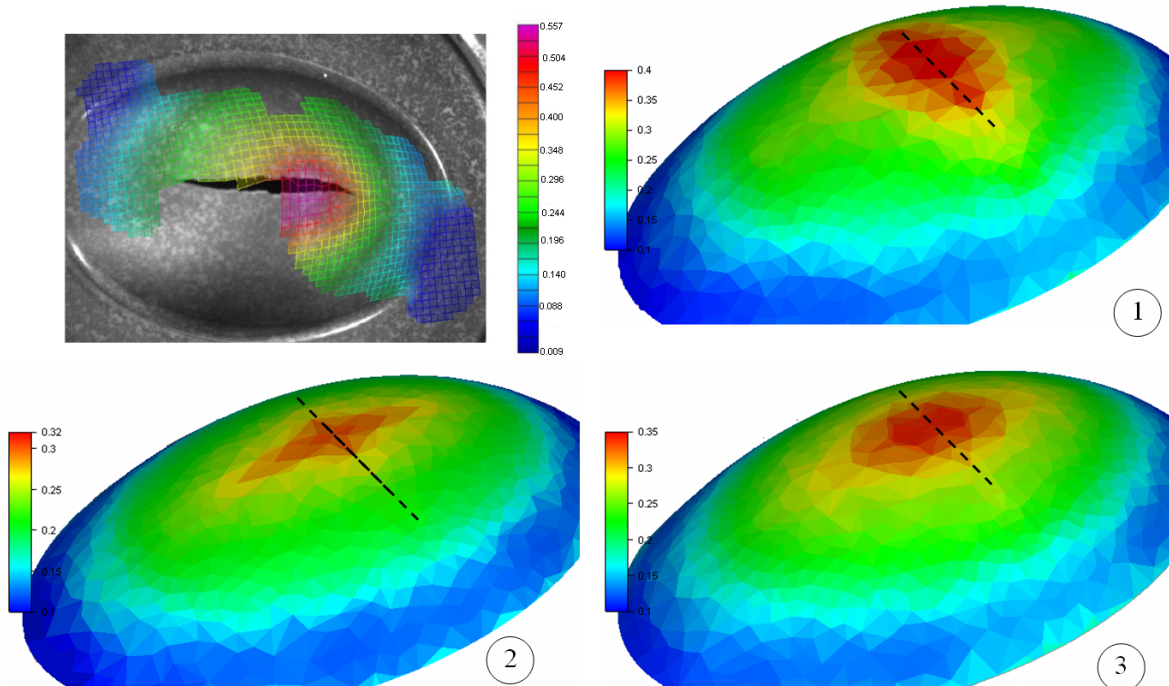


FIGURE V.21 – Cartographie des déformations plastiques équivalentes avec la direction de laminage (en pointillés) orientée selon le petit axe de l'ellipse : 1 - Hill B / 2 - Cazacu D / 3 - Cazacu E

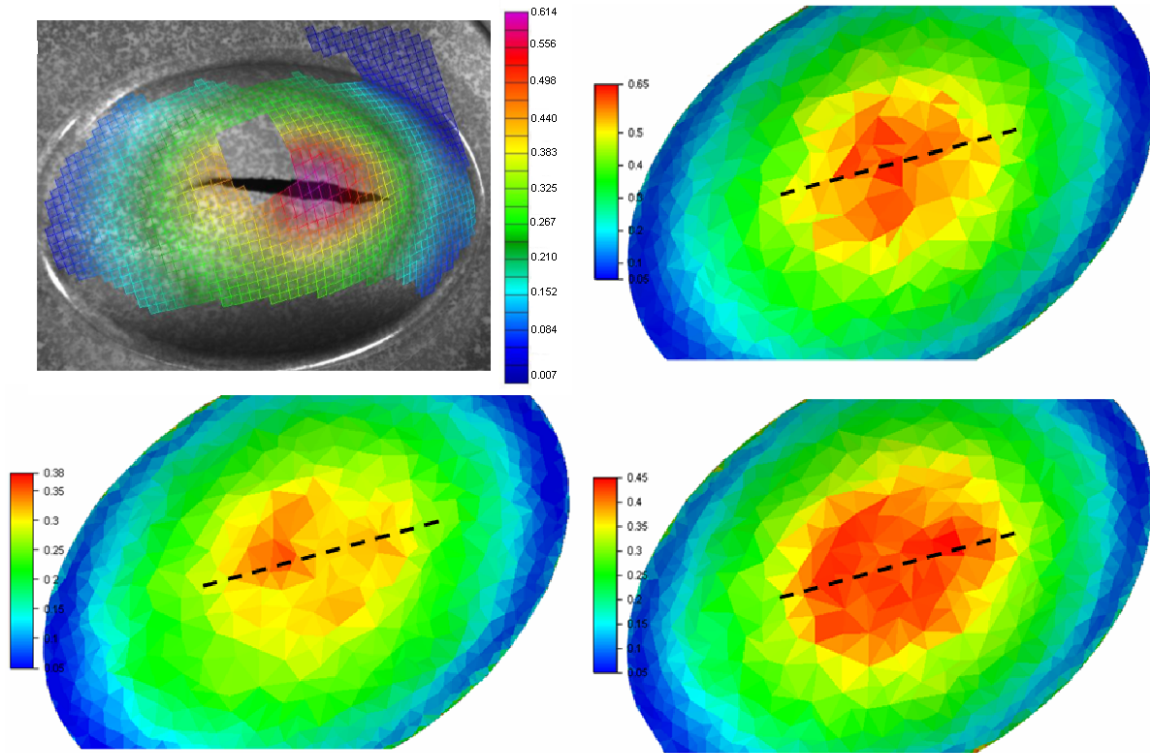


FIGURE V.22 – Cartographie des déformations plastiques équivalentes avec la direction de laminage (en pointillés) orientée à  $45^\circ$  par rapport au grand axe : 1 - Hill B / 2 - Cazacu D / 3 - Cazacu E

**Orientation initiale à  $45^\circ$**  Les simulations de gonflage elliptique mettent moins en évidence la localisation des déformations, observée précédemment. Tous les critères prédisent correctement la déformation plastique, dans les mêmes proportions obtenues précédemment. Le critère de Cazacu, identifié à partir de tous les observables (Cazacu-E), estime quelque peu la tendance de la déformation plastique à dévier selon la direction de laminage. On observe le même phénomène sur les mesures de champs disponibles. Seul ce dernier montre de telles aptitudes pour cette prédiction. L'identification des paramètres et la prise en compte d'observables supplémentaires, notamment les tests en cisaillement, affinent les prédictions numériques.

### V.2.5 La modélisation des alliages de titane pour le gonflage

Les simulations de gonflages hémisphériques ou elliptiques ont permis de vérifier l'efficacité de la modélisation du comportement plastique des alliages de titane. L'ex-

exploitation analytique du gonflage circulaire permet la validation des lois d'écrouissage identifiées sur les tests de traction uniaxiale, en ne tenant pas compte de l'effet de striction diffuse. La simulation numérique prédit des résultats corrects, quelque soit le modèle choisi. Le critère de Hill surestime légèrement les grandeurs mécaniques, mais les estimations sont bonnes en dehors de la zone de localisation des déformations. En effet, ce critère quadratique n'arrive pas à modéliser correctement cette zone. Pour permettre ceci, les critères non quadratiques, notamment le critère de Cazacu, ont été développés. L'utilisation d'un tel critère permet la prédiction de la zone de localisation, comme l'ont montré les différentes simulations réalisées. Le critère de Cazacu, indépendamment des observables utilisées pour son identification, permet la localisation des déformations plastiques. Les simulations de gonflages hémisphériques ont montré l'adéquation entre la zone de fortes déformations et l'orientation de la fissure lorsque la bulle éclate. Cette caractéristique lui confère un très grand avantage sur le critère de Hill, qui estime un comportement plus global. Les simulations de gonflage elliptique viennent confirmer le constat établi. Le critère de Cazacu permet une meilleure prédiction de la déformation plastique dans les zones de localisation. Ce phénomène avait déjà été remarqué dans le chapitre précédent sur la simulation des tests de traction uniaxiale. Les épaisseurs de la tôle prédites par le calcul éléments finis ont été comparées à celles obtenues par mesure de champs. Le critère de Hill est le plus précis, notamment du fait qu'il soit identifié uniquement à partir des coefficients de Lankford. L'introduction des limites d'élasticité dans la détermination des paramètres du modèle ne permet plus une corrélation parfaite sur les valeurs de  $r$ . Cependant, les épaisseurs trouvées par le critère de Cazacu, identifié à partir de tous les observables expérimentaux donne une bonne estimation de l'épaisseur. En effet une erreur maximale de 6% au moment le plus défavorable du procédé, c'est à dire la rupture de la bulle. Les comparaisons effectuées au cours de la mise en forme sont relativement correctes pour tous les critères de plasticité. Les essais de gonflage ont permis la mise en évidence de la prédiction de la localisation des déformations par le critère de Cazacu. Cependant, pour l'instant aucune comparaison n'a été effectuée sur des déplacements de tôles libres. Pour remédier à ce problème, la mise en forme d'un godet cylindrique va être étudiée.



## V.3 Emboutissage des alliages de titane

L'emboutissage d'un godet cylindrique permet de comparer les critères de plasticité en termes d'orientation des cornes d'emboutissage. Il s'agit d'un test permettant de déterminer l'efficacité d'une modélisation anisotrope. Malheureusement, de tels essais ont été impossibles à réaliser au laboratoire, du fait du manque de puissance de la presse d'emboutissage. En effet, avec les géométries de matrices et de poinçons disponibles, un effort de 30t, capacité maximale de la presse, n'est pas suffisant pour déformer la tôle de T40 d'une profondeur supérieure à 1.5mm. Des essais d'emboutissage d'une pièce hémisphérique, décrit dans la suite de ce chapitre, ont été réalisés dans les capacités de la machine. Cependant, une comparaison numérique de la mise en forme d'un godet cylindrique, modélisé par les différents critères de plasticité, a été réalisée, et s'appuie sur la littérature existante.

### V.3.1 Emboutissage d'un godet cylindrique

Dans un premier temps, les modèles de plasticité seront comparés numériquement par une simulation de l'emboutissage d'un godet cylindrique. Ces tests vont permettre de faire ressortir l'importance de l'identification du jeu de paramètre pour le critère de Cazacu, notamment la prise en compte des coefficients de Lankford. Une comparaison entre la simulation de la mise en forme d'un godet d'alliage T40 et des données expérimentales issues de la littérature concernant un alliage de titane commercialement pur permettra de valider le modèle de comportement choisi.

#### V.3.1.a Simulation d'un godet cylindrique

Une étude numérique compare l'emboutissage d'un godet cylindrique, dont la géométrie est donnée la suivante :

- le diamètre du flan est de 80mm et son épaisseur de 1 mm
- le diamètre du poinçon est de 50mm et celui de la matrice est 52,8mm
- les rayons des outils ont un rayon de 5mm
- la force appliquée sur le serre flan est de 10kN

La géométrie a été choisie pour permettre l'emboutissage total du godet. De plus les petites dimensions facilitent les calculs en terme de temps CPU et le maillage peut être plus fin.

L'orientation et la taille des cornes d'emboutissage sont observées pour une course de poinçon de 15mm (Fig.V.23), puis lors de la fin du procédé de mise en forme du godet cylindrique (Fig.V.24).

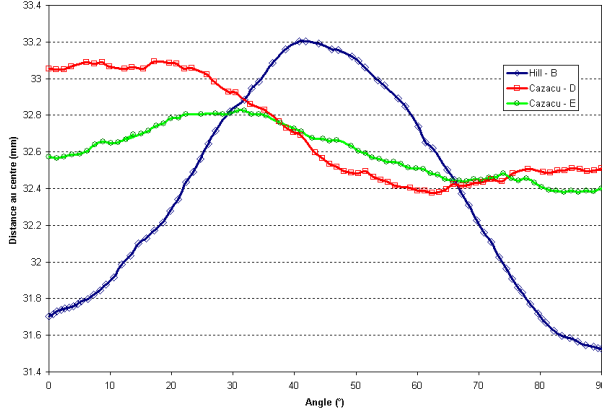


FIGURE V.23 – Variation angulaire de la distance entre le bord du flan et le centre du godet

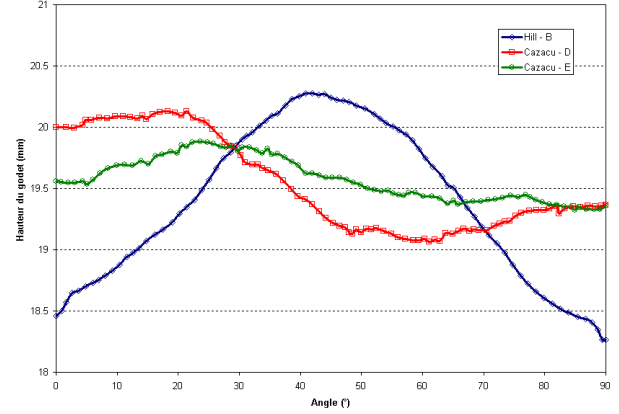


FIGURE V.24 – Variation angulaire de la hauteur du godet

Les cornes d'emboutissage prédites sont très prononcées en utilisant une modélisation de l'anisotropie par le critère de Hill. Le profil final du godet est un profil 4 cornes, orientées à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage. Le critère de Cazacu, identifié par les coefficients de Lankford et les limites d'élasticité (Cazacu - D) prédit quant à lui un profil 4 cornes, les deux plus prononcées orientées dans la direction de laminage et les deux autres, plus petites dans la direction transverse. Le critère de Cazacu, identifié à partir de tous les observables, estime l'orientation des cornes d'emboutissage située à environ  $30^\circ$  par rapport à la direction de laminage. De nombreuses différences apparaissent donc entre les différentes modélisations du comportement plastique des alliages de titane. Malheureusement, de tels essais n'ont pu être réalisés. Cependant, l'étude de l'évolution des coefficients de Lankford considérés par chaque jeu de paramètre identifié dans le chapitre 4 permet une explication de la position des cornes d'emboutissage (Fig. V.25).

Le profil des coefficients de Lankford issus du critère de Hill admet un maximum pour l'orientation de  $65^\circ$ . On retrouve les mêmes caractéristiques pour le critère de Cazacu, identifié à partir de tous les observables (Cazacu-E). Une telle évolution du coefficient de Lankford implique l'apparition d'une corne d'emboutissage aux alentours de la direction  $45^\circ$ , ce que l'on prédit numériquement. Le critère de Cazacu, issu de la stratégie D, est caractérisé par un jeu de paramètres décrivant une profil strictement croissant des valeurs de Lankford, ce qui implique des cornes d'emboutissage sur la direction transverse et de laminage. La littérature [Mori01],[Chen05] permet d'estimer

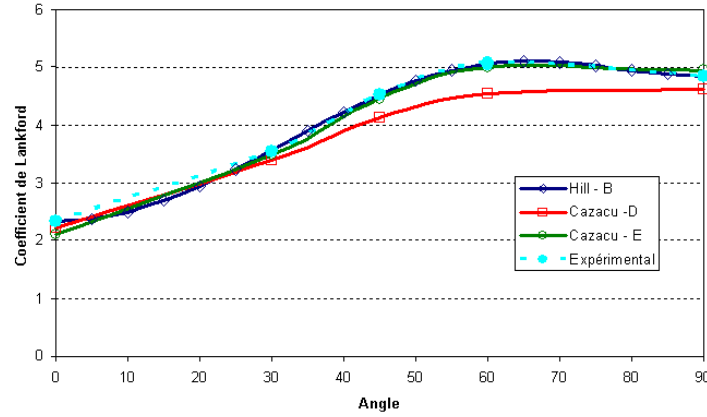


FIGURE V.25 – Evolution théorique du coefficient de Lankford en fonction du critère de plasticité

la position des cornes suivant une orientation de 30-50 °, validant ainsi les identifications des procédures B et E.

Ce test purement numérique a permis la mise en évidence de l'importance dans la procédure d'identification des coefficients de Lankford, et notamment de la précision que l'on désire sur ces derniers.

### V.3.1.b Sensibilité du critère de plasticité au jeu de paramètre

La procédure d'identification E pour le critère de Cazacu, utilisant les limites d'élasticité en traction, cisaillement et compression, ainsi que les coefficients de Lankford, a été de nouveau utilisée pour identifier un second jeu de paramètres. Les poids de chaque partie de la fonction objectif (équation IV.21) ont été légèrement modifiés pour réduire l'influence des coefficients de Lankford sur le résidu final. En comparant les valeurs de chaque paramètre (Tab. V.4), on note des différences très minimes entre les deux jeux de paramètres. On pourrait donc s'attendre à un comportement quasi-identique dans les simulations numériques. Or, la mise en forme d'un godet cylindrique démontre de fortes différences en terme d'orientation des cornes d'emboutissage (Fig. V.26).

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
Jeu 1	0,0859	- 0,0064	-0,05	0,7360	- 0,04	0,4120	0,9684	0,9684	0,9684
Jeu 2	0,0986	0,0027	-0,0209	0,7218	- 0,0174	0,4379	0,9185	0,9185	0,9185

TABLE V.4 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie E pour l'alliage T40 avec différents poids sur les coefficients de Lankford.

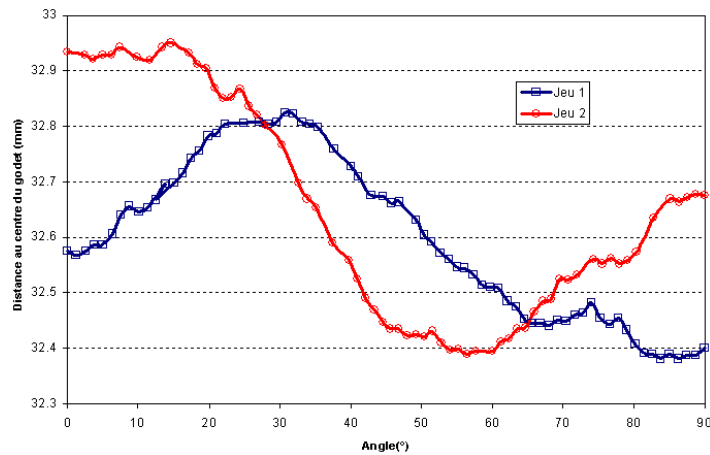


FIGURE V.26 – Evolution du profil du godet en fonction du jeu de paramètre identifié pour le critère de Cazacu

Alors les paramètres de deux jeux, identifiés par la même stratégie, sont quasi-identiques, de grandes différences apparaissent lors de la simulation de la mise en forme. La grande sensibilité du critère ajoute une difficulté majeure dans la procédure de détermination des paramètres du matériau. Avant de pouvoir conclure sur l'efficacité de la modélisation du jeu de paramètres, il faudra donc mettre en oeuvre des moyens expérimentaux permettant d'obtenir un élément de comparaison sur des procédés de formage.

Cette grande sensibilité du critère de plasticité pose aussi des problèmes d'estimation d'erreur sur la mesure des coefficients de Lankford. En effet, dans le cas de l'alliage T40, on note une grande dispersion des mesures des valeurs de Lankford pour une orientation supérieure à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage. A partir de la figure V.27, on peut aisément tracer plusieurs profils d'évolution des valeurs de  $r$ , tout en restant dans l'intervalle de mesure. La bonne variation de ce coefficient peut être établie seulement grâce à l'étude expérimentale de cornes d'emboutissage.

La forte sensibilité du critère de Cazacu renforce l'intérêt d'une mesure expérimentale très précise des coefficients de Lankford, pour permettre une modélisation fiable du comportement plastique, sans réaliser des essais de mise en forme, difficile à mettre en oeuvre. On gardera par la suite, le jeu de paramètres permettant une précision plus forte sur les coefficients de Lankford (Cazacu E).

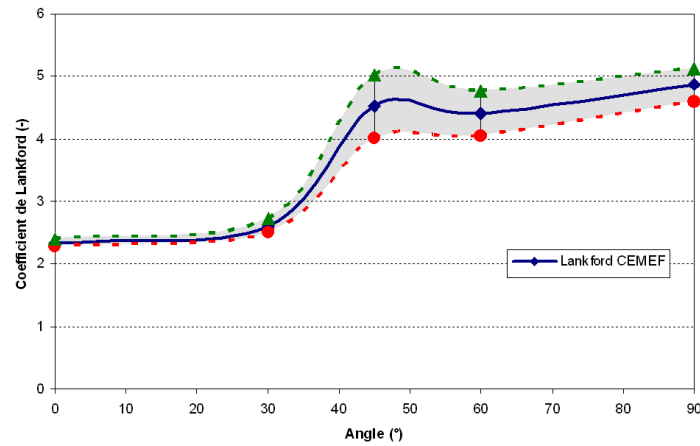


FIGURE V.27 – Intervalle d'erreur des coefficients de Lankford en fonction de l'orientation

### V.3.1.c Comparaisons expérimentales pour la mise en forme d'un godet cylindrique

Kuwabara *et al.* [Kuwabara01] ont réalisé expérimentalement des godets cylindriques en alliage de titane commercialement pur. Il s'agissait d'une autre nuance que le T40, avec des limites d'élasticité et un écrouissage beaucoup plus faible, mais des valeurs des coefficients de Lankford proches (entre 1,8 et 5.2 contre 2,3 et 5.1 pour l'alliage T40). Même si l'alliage n'est pas exactement le même, cette publication fournit des informations de comparaisons sur l'orientation et la taille des cornes d'emboutissage. La géométrie du procédé est la suivante :

- le diamètre du flan est de 140 mm et son épaisseur de 0,78 mm
- le diamètre du poinçon est de 60 mm et celui de la matrice est 62,4mm
- les rayons de courbure des outils sont de 6 mm
- le serre-flan est maintenu fixe dans une position surélevée de 0,86 par rapport à la face supérieure de la tôle
- le comportement plastique utilisé est le critère de Cazacu, identifié à partir de tous les observables associées à une loi d'écrouissage mixte isotrope et cinématique.

La comparaison des cornes pour une profondeur d'emboutissage de 30mm entre la prédiction numérique pour de l'alliage de titane commercialement pur T40 et les mesures expérimentales réalisées avec du JIS1 [Kuwabara01] permet de conclure sur l'efficacité du critère de Cazacu. On ne peut comparer précisément les valeurs obtenues, étant donné la différence du matériau en terme de comportement mécanique. Cependant, une similitude ayant été observée dans l'évolution des coefficients de Lankford et des limites d'élasticité en traction, on peut considérer ces données expérimentales comme représentatives du comportement global de l'alliage T40. La figure V.28 compare les

profils de cornes obtenus par la prédiction numérique et l'essai expérimental. On note une différence dans la distance moyenne du bord de la tôle au centre du godet, qui peut être imputée à la différence de nuance d'alliage de titane. Par contre, l'apparition des cornes pour une orientation de  $40^\circ$ , et un avalement plus important dans la direction transverse que dans le sens du laminage se retrouvent sur les deux courbes. Même si il s'agit de matériau légèrement différent, l'efficacité dans la modélisation du comportement plastique du critère de Cazacu lui confère un net avantage comparé au critère quadratique de Hill, avec lequel les simulations avait été réalisées.

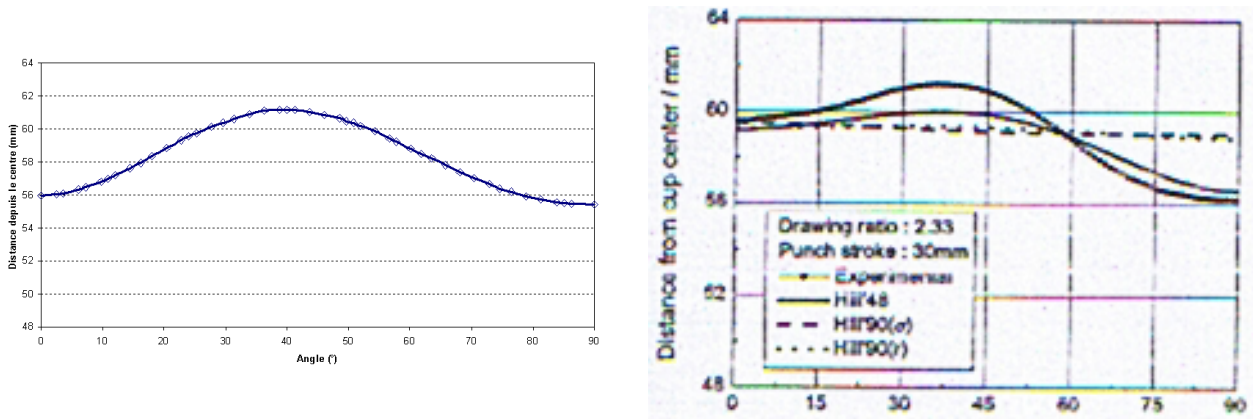


FIGURE V.28 – Variation angulaire de la distance entre le bord du flan et le centre du godet pour une profondeur de 30mm : prédiction numérique T40 à gauche et expérimental JIS1 à gauche [Kuwabara01]

La figure V.29 compare les formes finales d'un godet embouti à partir d'une tôle de titane, du T40 pour la prédiction numérique et un alliage commercialement pur pour l'expérimental [Chen05]. L'estimation numérique de la forme finale du flan est semblable à celle obtenue expérimentalement. Cependant, la forme dans la zone de direction de laminage diffère légèrement, du fait d'ajout de plan de symétrie dans le calcul éléments finis. Cependant la forme finale prédite numériquement correspond à celle observée expérimentalement.

La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux, pour l'emboutissage d'un godet cylindrique d'alliage de titane commercialement pur, permet la validation de la modélisation du comportement plastique choisi. Le critère de Cazacu permet la prédiction de forme finale de flan conforme à celle observée. La non quadricité du critère lui permet d'intégrer correctement le comportement plastique fortement anisotrope du T40, contrairement au critère de Hill qui ne peut reproduire correctement l'avalement de flan lors d'un emboutissage.

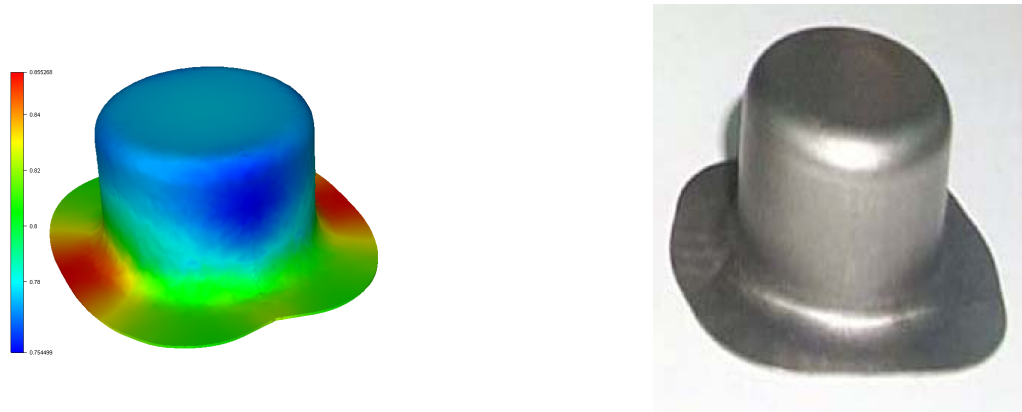


FIGURE V.29 – Emboutissage d’un godet cylindrique : à droite répartition des épaisseurs finales issues de la prédiction numérique pour le T40, à gauche essai expérimental sur du titane commercialement pur [Chen05]

### V.3.2 Emboutissage d’une pièce axisymétrique

Des emboutis axisymétriques ont été réalisés au CEMEF, dans la capacité de la presse d’emboutissage. La géométrie utilisé est donc la suivante (Fig. V.30) :

- le diamètre du flan est de 240 mm et son épaisseur de 1,6 mm
- le diamètre du poinçon est de 80 mm et celui de la matrice est 124mm
- les rayons des outils ont un rayon de 6 mm
- le serre-flan est maintenu par une force de 60 kN
- les critères de plasticité utilisés sont le critère de Hill (Hill-B) et le critère de Cazacu (Cazacu-D et Cazacu-E)
- la loi d’écrouissage est une combinaison entre une loi isotrope et une loi cinématique (stratégie IV)

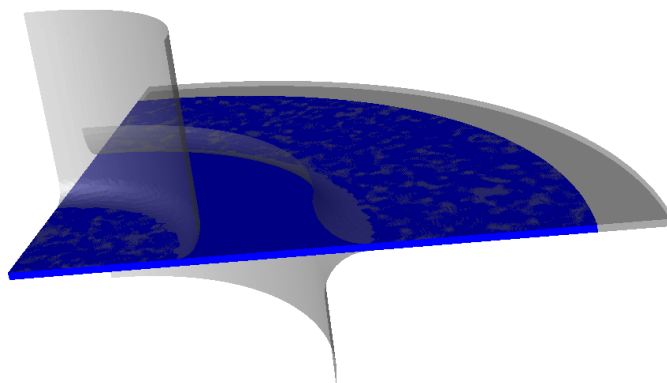


FIGURE V.30 – Géométrie de l’emboutissage axisymétrique

Un marquage est appliqué sur la tôle pour permettre l’utilisation de mesures de champs sur les flans du cône, une fois la tôle emboutie. La puissance de la presse ne

permet pas de réaliser des emboutissages profonds. La profondeur maximale atteinte par le poinçon est de 35 mm, soit une déformation plastique maximale d'environ 13%.

L'étude des cartographies de déformations plastique (Fig. V.31), issues des calculs numériques considérant les différents modèles de plasticité permet de conforter les conclusions tirées précédemment. Le critère de Cazacu, identifié à partir de tous les observables (Cazacu-E), prédit les valeurs les plus proches de celles relevées expérimentalement. On peut noter les mêmes variations en fonction de la position étudiée, notamment une déformation plastique plus élevée suivant la direction de laminage, comme mesurée par la corrélation d'images. Ce critère non quadratique associé à une stratégie d'identification des paramètres adaptée permet une bonne estimation de la mise en forme d'alliage de titane T40. Les autres critères surestiment les grandeurs observées, mais permettent une modélisation qui reste fiable.

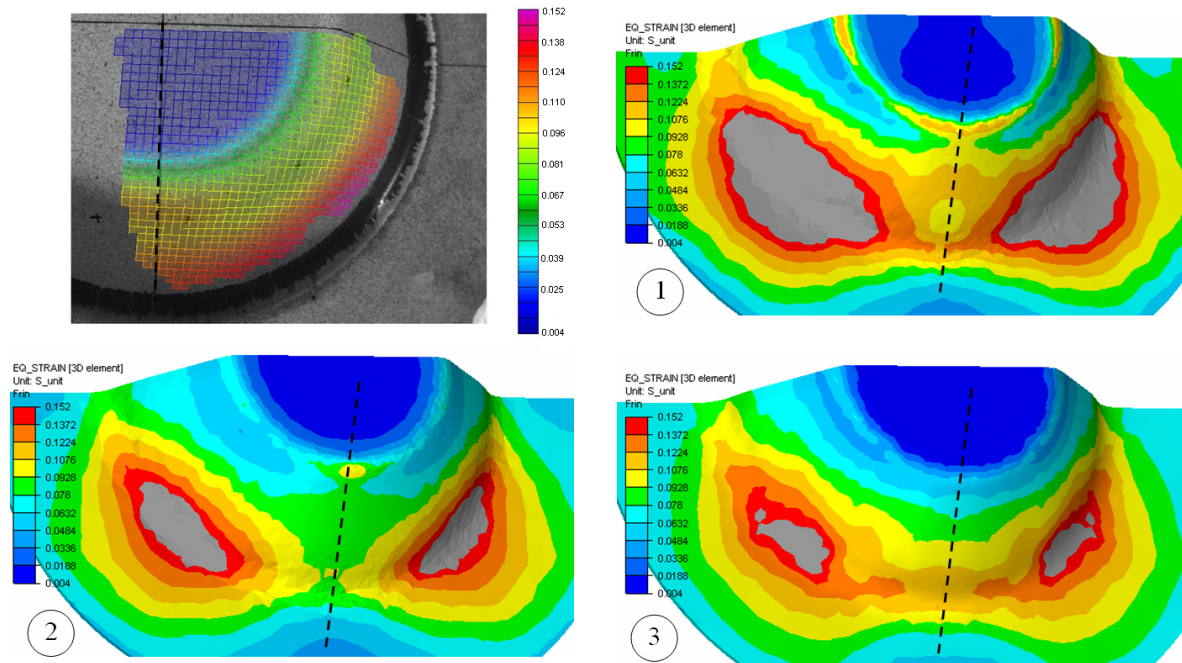


FIGURE V.31 – Cartographie des déformations plastique équivalente, la direction de laminage est indiqué par la ligne pointillée : 1 - Hill B / 2 - Cazacu D / 3 - Cazacu E



## V.4 Conclusion du chapitre

Les différents modèles ont été identifiés selon plusieurs procédures, considérant plus ou moins d'observables expérimentales. La confrontation des simulations de tests de sollicitation simple avec les résultats expérimentaux disponibles a permis de faire un premier choix parmi les jeux de paramètres disponibles. L'utilisation des coefficients de Lankford dans la stratégie d'identification est cruciale pour obtenir des prédictions numériques fiables sur des tests simples.

Des essais de mise en forme à froid ont été réalisés au laboratoire afin de valider les modèles de comportement, précédemment identifiés. Le gonflage hémisphérique est, à la fois, un outil de caractérisation et un test de validation. Une modélisation analytique de cet essai permet d'étudier le comportement plastique de l'alliage pour une plage de déformation plus étendue que la traction uniaxiale. Cette étude a permis d'évaluer les lois d'écroutissage isotropes, et notamment de choisir entre la loi de Norton-Hoff et la loi adoucissante précédemment identifiées à partir des tests de traction. L'ajout d'une composante d'adoucissement dans l'écroutissage permet une meilleure corrélation pour l'essai de traction, mais est mis en défaut par le gonflage hémisphérique. On préférera donc un modèle de Norton-Hoff qui permet une modélisation correcte en traction et en gonflage à partir d'une procédure d'identification basée sur un test de traction uniaxiale.

Des mesures de champs ont été effectuées sur des essais de gonflage hémisphérique et elliptique, ainsi que sur de l'emboutissage. La comparaison des cartes de déformation plastique montre globalement une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les prédictions numériques. Cependant, le critère de Cazacu offre une plus grande précision par la modélisation des zones de localisation de déformation, correctement orientées par rapport aux zones de rupture observées. Cette prédiction lui confère un avantage certain comparé au critère quadratique de Hill. L'emboutissage d'un godet cylindrique est un essai discriminant concernant la modélisation de l'anisotropie du matériau. Les cornes d'emboutissage et leur orientation par rapport à la direction de laminage sont un miroir du comportement anisotrope. Etant dans l'incapacité de réaliser ces essais au laboratoire, des tests purement numériques ont cependant permis de rétablir l'importance de l'identification des paramètres du matériau. En effet, les prédictions numériques sont fortement dépendantes de la précision d'identification sur les coefficients de Lankford. Or, l'erreur de mesure sur ces mêmes coefficients ne permet pas, dans le cas de l'alliage T40 de déterminer correctement la variation de la valeur de  $r$  en fonction de son orientation. Plusieurs profils peuvent être considérés, soit passant par un maximum, soit strictement croissant, ce qui influe fortement sur l'orientation des cornes d'emboutissage. Aux erreurs de mesures viennent s'ajouter les erreurs commises

lors de la procédure d'identification, et la modélisation du comportement plastique peut être erronée. Tout en adoptant des méthodes fiables, le modèle peut prédire de mauvaises cartographies de champs mécaniques. Pour remédier à ce problème, il est impératif de comparer les prédictions numériques sur l'emboutissage d'un godet, sous peine de considérer un jeu de paramètres correct qui ne l'est pas. De plus, le test de sensibilité du critère de Cazacu montre une différence notable dans les résultats avec des jeux de paramètres pourtant proches. Cette caractéristique renforce la nécessité d'utiliser la mise en forme d'un godet comme test de validation de la modélisation et de son identification.

La littérature a permis la comparaison entre le modèle numérique et des tests expérimentaux. Même s'il s'agissait de nuances d'alliages de titane commercialement pur différentes, les données expérimentales présentées peuvent être un élément de comparaison intéressant, au vu des valeurs proches des coefficients de Lankford. Les prédictions numériques intégrant le critère de Cazacu, correctement identifié, permettent la validation de la modélisation choisie. En effet, l'estimation du calcul éléments finis est bonne concernant le profil des cornes d'emboutissage et l'aspect général du flan.

Ce chapitre traitant de la simulation numérique de la mise en froid des alliages de titane a mis en évidence l'importance de la prise en compte des coefficients de Lankford dans le processus d'identification. De plus les essais de mise en forme sont nécessaires pour confirmer ou infirmer les paramètres identifiés. Concernant les modèles de plasticité, le critère de Hill et de Cazacu sont globalement satisfaisants, cependant le critère non quadratique prédit des grandeurs plus proches de celle mesurées expérimentalement, en tenant compte des localisations de déformation et prédisant des profils de cornes d'emboutissage plus proche de la réalité.



# Conclusion

Le rapport entre les propriétés mécaniques et thermiques et la densité des alliages de titane leur confère un net avantage sur des métaux "standards", à savoir l'acier et l'aluminium et l'utilisation de ces matériaux est importante dans l'industrie aéronautique. Avec des propriétés de résistance mécanique en service équivalente à un acier, pour un gain de poids d'un facteur proche de deux, et une meilleure tenue à chaud qu'un aluminium, les alliages de titane permettent un compromis entre tous les facteurs importants pour l'utilisation d'une pièce industrielle dans le domaine aéronautique. Cependant, si les propriétés de la pièce sont un avantage pour lors de son utilisation, l'obtention de celle-ci s'avère plus complexe. L'alliage de titane le plus utilisé est le TA6V, généralement mise en forme à chaud par formage superplastique. Afin de réduire les coûts de fabrication, certaines pièces industrielles sont formées à froid après une étape de laminage, elle aussi réalisée à température ambiante. Les alliages commercialement purs permettent la mise en oeuvre d'un tel procédé.

Les alliages de titane sont classés en différentes nuances selon leurs propriétés cristallographiques. En effet, une transformation allotropique existe pour le titane pur. A température ambiante, la structure cristallographique est hexagonale compacte dénommée phase  $\alpha$ , alors qu'au-dessus de la température de transus ( $882^\circ$ ), une phase  $\beta$  à structure cubique centrée apparaît. La nuance  $\alpha$  regroupe les alliages commercialement purs, monophasique et les alliages où la phase  $\beta$  est extrêmement faible. Les alliages biphasiques sont appelés  $\alpha + \beta$  et les alliages  $\beta$  possèdent une structure cubique. L'objet de cet étude concerne la modélisation et la simulation de la mise en forme des alliages  $\alpha$  à structure hexagonale compacte, et notamment les nuances T40 et SSAT350.

Les alliages commercialement purs sont très anisotropes de par leur structure cristalline et phénomènes microstructuraux mis en oeuvre lors de la déformation plastique. Le plan prismatique, à savoir orienté par l'axe  $\vec{c}$  de la maille cristalline, est le plan primaire de glissement. Les plans secondaires sont le plan basal et le plan pyramidal. Le caractère anisotrope d'une telle structure cristalline est renforcé par les modes de maillage activés, fonction de l'orientation initiale de l'axe  $\vec{c}$ . L'étude de la microstructure

et des phénomènes mis en jeu lors de la déformation plastique permet l'établissement d'une base concernant la modélisation du comportement plastique de tels alliages.

La modélisation macroscopique du comportement plastique des alliages de titane se compose d'un critère de plasticité et de lois d'écrouissage, à la fois isotrope et cinématique. Le critère de plasticité définit la surface de plasticité initiale, et l'évolution de cette dernière est décrite par les lois d'écrouissage. De nombreux critères anisotropes, quadratiques ou non quadratiques, ont été développés pour permettre la modélisation de la plasticité des métaux. Parmi ceux-ci, le critère de Hill 1948, pour sa fiabilité pour la modélisation des aciers et son utilisation courante, et le critère de Cazacu, développé pour les métaux hexagonaux compacts ont été retenus pour modéliser la surface de plasticité des alliages de titane. L'évolution de cette surface est régie par une loi d'écrouissage isotrope, décrivant plus ou moins finement le durcissement mécanique et par une loi d'écrouissage cinématique non linéaire, permettant la prise en compte de l'effet Bauschinger.

Le comportement plastique des alliages de titane est fortement anisotrope, donc différent selon la direction de sollicitation. Cette propriété implique le suivi des directions d'anisotropie, à savoir pour les métaux, la direction de laminage et la direction transverse. Ce suivi peut être réalisé grâce à plusieurs transformations, qu'elles soient macroscopiques ou microscopiques. La réactualisation des axes d'anisotropie par le gradient de la transformation permet un suivi de ces derniers par une grandeur image de la transformation subie par la tôle. Le test de cisaillement simple, couramment utilisé pour vérifier la fiabilité des modèles, a permis la validation du choix effectué. Des comparaisons entre résultats analytiques et numériques ont permis de définir plus précisément la gestion du modèle au cours de la déformation, pour conserver l'objectivité et ne pas introduire des erreurs numériques non physiques au cours de la mise en forme. La cinématique de la formulation anisotrope est donc définie à partir de la mécanique des grandes transformations permettant la mise en place d'un modèle objectif et conforme à la physique. Pour ce faire, tous les calculs doivent être effectués dans un repère non orthonormé suivant la transformation de la matière. L'utilisation d'une telle base implique la notion de variance des grandeurs tensorielles et des changements de base fonction de la variable transportée. La mise en place de la formulation anisotrope élasto-plastique permet un calcul numérique en introduisant aucun phénomène non physique.

Forge<sup>®</sup> est un logiciel de calcul éléments finis résolvant les équations d'équilibres avec une formulation mixte vitesse-pression. L'algorithme du retour radial permet le calcul de l'incrément de contrainte de la formulation élasto-plastique anisotrope dans le repère local. L'implémentation d'un critère de plasticité implique le calcul de la dérivée première et seconde de ce dernier par rapport au déviateur des contraintes à la fin de

l'incrément. Le critère quadratique de Hill 1948 est donc simple à mettre en oeuvre, contrairement au critère de Cazacu, qui nécessite la mise en oeuvre de développement limités d'ordre 1 afin d'obtenir l'incrément de contrainte. Ce critère anisotrope est donc numériquement plus complexe à implémenter. Cette différence s'observe également sur les temps de calcul de simulation, le critère non quadratique étant deux fois plus lent à converger vers la solution finale. L'intégration de la formulation anisotrope dans le logiciel de calcul est validée à l'aide de cas tests trouvés dans la littérature issue de conférences.

Après avoir défini la formulation anisotrope à partir de modèles macroscopiques tenant compte des phénomènes microstructuraux responsables de la déformation plastique, la cinématique et l'implémentation du modèle numérique, des essais expérimentaux ont été menés par les différents partenaires du projets pour permettre la simulation de la mise en forme des alliages de titane T40 et SSAT350. Les données disponibles pour l'identification des modèles anisotropes sont les limites d'élasticité en traction, cisaillement et compression pour plusieurs directions de sollicitation et les coefficients de Lankford en traction. Plusieurs procédures d'identification, utilisant une base expérimentale plus ou moins large, afin d'étudier l'importance de la finesse de l'identification sur les résultats numériques et leurs corrélations avec les données numériques. Le critère de Hill 1948 a été identifié à partir des limites d'élasticité en traction pour la première méthode et des coefficients de Lankford en traction pour la seconde. Les paramètres du critère de Cazacu 2006 ont été déterminés par trois procédures différentes : la première tenant compte uniquement des limites d'élasticité en traction, la seconde incluant également les coefficients de Lankford et la troisième basée sur toutes les données expérimentales disponibles.

Les lois d'écrouissage sont identifiées à partir des données obtenues par le test de traction uniaxiale dans la direction de laminage. Une modélisation du comportement plastique des alliages de titane comportant uniquement un écrouissage isotrope est identifiée par une méthode de minimisation des moindres carrés. Une plateforme d'optimisation associée à un modèle semi-analytique permet l'identification des paramètres d'une loi d'écrouissage combinant écrouissage isotrope et cinématique. Les premiers résultats numériques obtenus ont permis d'établir les premières conclusions sur l'efficacité de la procédure d'identification. Le fait de ne pas tenir compte des coefficients de Lankford implique une prédiction numérique très peu réaliste des déformations plastiques et des évolutions géométriques au cours du procédé de formage. Les premières simulations de tests à sollicitations simples mettent en avant la meilleure prédiction des zones de localisation des déformations par le critère de Cazacu par rapport au critère de Hill. Cependant, des essais expérimentaux de mise en forme doivent être mis en oeuvre pour permettre de confirmer les conclusions précédentes.

Le test de gonflage hémisphérique permet une caractérisation du comportement plastique en grandes déformations. Le dépouillement de cet essai, associé à un traitement analytique de ce dernier, permet de discriminer les lois d'écrouissage identifiées sur le test de traction. Des champs de déformations plastiques expérimentaux sont obtenus par corrélation d'images à partir de ce test de gonflage hémisphériques et elliptiques. La comparaison des cartographies issues des essais de gonflage avec celles obtenues par la prédiction numérique montre une bonne corrélation. Cependant, le critère de plasticité se distingue du critère de Hill par une meilleure appréciation des zones de localisations de déformation, et notamment la bonne orientation des zones de rupture. On retrouve donc numériquement les caractéristiques théoriques entrevues par ce critère non quadratique. Par contre, le critère de Cazacu est très sensible aux paramètres identifiés. En effet, avec des jeux de paramètres très proches, les résultats numériques sont totalement différents. Cet inconvénient implique une très bonne précision sur les données expérimentales, notamment les coefficients de Lankford. Dans le cas du T40, l'intervalle d'erreur sur ces mêmes coefficients ne permet pas de déterminer correctement l'évolution du coefficient en fonction de la direction de sollicitation. Pour combler cette incertitude, un essai d'emboutissage d'un godet doit être réalisé. N'ayant pas les capacités de mettre en oeuvre ce dernier au laboratoire, la littérature permet de comparer qualitativement les prédictions numériques. Les cornes d'emboutissage obtenues par le critère de Cazacu sont conformes à celle trouvées dans différents articles. Le critère de Cazacu, correctement identifié, prouve ainsi qu'il permet une bonne prédiction de la simulation des procédés de mise en forme des alliages de titane.

(Plusieurs perspectives à cette étude peuvent être envisagées, notamment d'un point de vue simulation numérique, identification des paramètres et la prise en compte de phénomènes physiques plus fins. La simulation numérique peut être enrichie par un travail sur le retour élastique des alliages de titane. Utiliser une loi d'écrouissage cinématique permet une meilleure modélisation du retour élastique. Cependant, dans cette étude, ce point n'a pas été traité. On pourrait notamment essayer de définir le retour élastique à l'aide de la décomposition polaire de la transformation élasto-plastique pour connaître en chaque instant le gradient de la transformation élastique. Ce succinct raisonnement demande cependant une réflexion plus poussée afin de le tester.

L'amélioration des prédictions numériques passe par une réflexion sur les algorithmes de contact, notamment plus adaptés aux procédés de formage de tôles, où les noeuds sont pour la majorité en contact avec les outils. La gestion par pénalisation du contact est plus adaptée aux procédés de formage, et la gestion du frottement devient difficile si on utilise des maillages grossiers.

Le couplage de la formulation anisotrope avec un modèle d'endommagement permet-

trait l'affinage de la prédiction numérique, notamment dans les zones de localisation de déformations. La prise en compte de ce phénomène physique, associée à un algorithme de "kill element", permettrait la prédiction des zones de ruptures.

La procédure d'identification peut être affinée par l'introduction de nouveaux points sur la surface de plasticité, notamment pour un état de contrainte biaxiale. Ces valeurs, très complexes à obtenir expérimentalement, peuvent être estimées par des modèles micromécaniques. Le couplage entre les données, issues des essais expérimentaux et des calculs micromécaniques, permettrait de connaître précisément la forme de la surface de plasticité, et ainsi avoir une meilleure modélisation des zones de localisation de contrainte.





## Annexe A

### Test de cisaillement pour un matériau anisotrope élastique

Le test de cisaillement (Fig. A.1) associe à la fois une rotation moyenne  $[\mathbf{R}]$ , ainsi qu'une déformation. Il permet donc de valider une formulation cinématique en comparant les résultats numériques avec des calculs analytiques. On considère un élément quadrilatère unitaire, répondant à l'hypothèse des contraintes planes. Le paramètre  $\gamma$  est l'unique variable du problème. Toutes les grandeurs seront exprimées en fonction de celui-ci. Dans ce développement analytique, le repère de référence est le repère de Green-Naghdi ( $\vec{g}_i$ ,  $i=1..2$ ) et toutes les grandeurs seront exprimés dans celui-ci. On

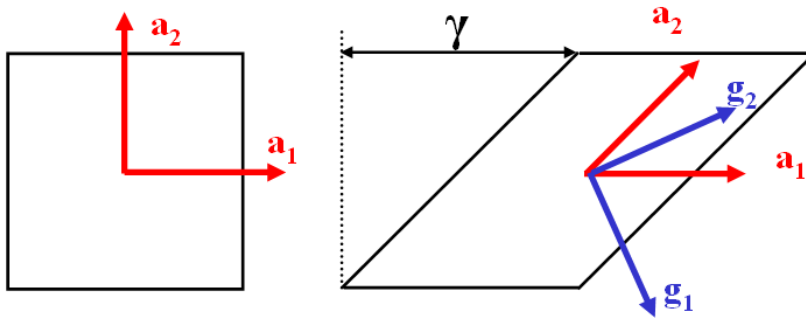


FIGURE A.1 – Test de cisaillement simple

peut calculer facilement le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  et la matrice de rotation

rigide  $[\mathbf{R}]$  :

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$[\mathbf{R}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2/4}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

On suppose que l'orientation initiale des axes d'anisotropie est fonction de l'angle  $\theta_0$ , et peut être exprimée par les relations suivantes :

$$\vec{a}_1^0 = \begin{Bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_2^0 = \begin{Bmatrix} -\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Les déformations logarithmiques ont été calculées dans le repère de Green-Naghdi [Gilormini93] :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{gn} = -\epsilon_{22}^{gn} &= -\ln \left( 1 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \\ \epsilon_{12}^{gn} &= -\left( \frac{\gamma}{2} - 2\tan^{-1} \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A partir des déformations et des changements de base (équation II.35), on peut en déduire les incréments de déformations dans le repère des axes d'anisotropie ( $\vec{a}_i$ ,  $i=1..2$ ). On obtient donc les grandeurs suivantes, l'expression de la déformation en cisaillement n'est pas inscrite du fait de sa grande complexité :

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{11}^{ani} &= \frac{\cos(\theta_0)(-\sin(\theta_0) + \gamma\cos(\theta_0))}{1 - 2\gamma\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + \gamma^2\cos^2(\theta_0)}\Delta\gamma \\ \Delta\epsilon_{22}^{ani} &= \frac{-\sin(\theta_0)(\cos(\theta_0) + \gamma\sin(\theta_0))}{1 - \gamma^2 - 2\gamma\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + \gamma^2\cos^2(\theta_0)}\Delta\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Le comportement du matériau est considéré comme élastique anisotrope, caractérisé par la matrice suivante :

$$[\mathbf{C}_a] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

## A.1 Orientation initiale à 0/90 °

On obtient donc les résultats analytiques suivants :

- Dans la base des axes d'anisotropie, les déformations logarithmiques sont :

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}^{ani} &= 0 \\ \epsilon_{22}^{ani} &= -\frac{1}{2}\ln(1 + \gamma^2) \\ \epsilon_{12}^{ani} &= \arcsin \gamma\end{aligned}\tag{A.7}$$

- On en déduit les contraintes dans la base de Green-Naghdi en appliquant les changements de base adéquats :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{gn} &= \frac{1}{2}\gamma^2 E_2 \frac{\ln(1 + \gamma^2)}{4 + 5\gamma^2 + \gamma^4} \frac{4\gamma C \arcsin \gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}(4 + \gamma^2)} \\ \sigma_{22}^{gn} &= \frac{1}{2}(\gamma^4 + 4\gamma^2 + 4)E_2 \frac{\ln(1 + \gamma^2)}{4 + 5\gamma^2 + \gamma^4} \frac{2\gamma(2 + \gamma^2)C \arcsin \gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}(4 + \gamma^2)} \\ \sigma_{12}^{gn} &= \frac{1}{2}\gamma(2 + \gamma^2)E_2 \frac{\ln(1 + \gamma^2)}{4 + 5\gamma^2 + \gamma^4} \frac{(4 + 3 * \gamma^2)C \arcsin \gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}(4 + \gamma^2)}\end{aligned}\tag{A.8}$$

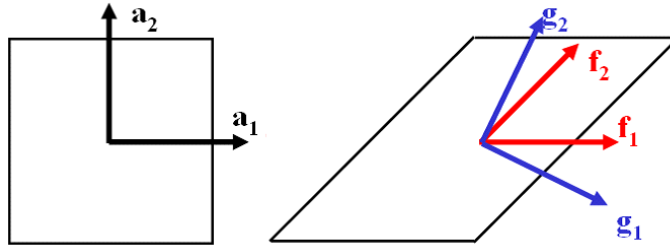


FIGURE A.2 – Comparaison numérique/analytique pour le test du cisaillement simple, avec une orientation initiale des axes d'anisotropie à 0/90 °

## A.2 Orientation initiale à 45/135 °

Dans la base des axes d'anisotropie, les déformations logarithmiques sont :

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}^{ani} &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \gamma + \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ \epsilon_{22}^{ani} &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ \epsilon_{12}^{ani} &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^4 + 4}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^4 + 4}} - 1 \right)\end{aligned}\tag{A.9}$$

On en déduit les contraintes dans la base de Green-Naghdi (Sommmation des trois termes) :

	Terme en E1
$\sigma_{11}^{gio}$	$\frac{(4+4\gamma+\gamma^2)(1/2 \cdot \ln(1+\gamma+\gamma^2/2))}{(4+\gamma^2)(2+2\gamma+\gamma^2)}$
$\sigma_{22}^{gio}$	$\frac{(4+4\gamma+5\gamma^2+2\gamma^3+\gamma^4)(1/2 \cdot \ln(1+\gamma+\gamma^2/2))}{(4+\gamma^2)(2+2\gamma+\gamma^2)}$
$\sigma_{12}^{gio}$	$\frac{(4+4\gamma+3\gamma^2+\gamma^3)(1/2 \cdot \ln(1+\gamma+\gamma^2/2))}{(4+\gamma^2)(2+2\gamma+\gamma^2)}$

+

	Terme en E2
$\sigma_{11}^{gio}$	$\frac{(4-4\gamma+\gamma^2)(1/2 \ln(1-\gamma+\gamma^2/2))}{\gamma^4-2\gamma^3+6\gamma^2-8\gamma+8}$
$\sigma_{22}^{gio}$	$\frac{(\gamma^4+4+5\gamma^2-4\gamma-2\gamma^3)(1/2 \ln(1-\gamma+\gamma^2/2))}{\gamma^4-2\gamma^3+6\gamma^2-8\gamma+8}$
$\sigma_{12}^{gio}$	$\frac{(\gamma^3-4-3\gamma^2+4\gamma)(1/2 \ln(1-\gamma+\gamma^2/2))}{\gamma^4-2\gamma^3+6\gamma^2-8\gamma+8}$

+

	Terme en C
$\sigma_{11}^{gio}$	$\frac{4(\gamma^2-4)(1/2 \ln(\gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4})+1)-1/2 \ln(\gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4}-1))}{(4+\gamma^2)\sqrt{(4-4\gamma+2\gamma^2)*\sqrt{(4+4\gamma+2\gamma^2)}}$
$\sigma_{22}^{gio}$	$\frac{4(\gamma^4+3\gamma^2+4)(1/2 \ln(\gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4})+1)-1/2 \ln(\gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4}-1))}{(4+\gamma^2)\sqrt{(4-4\gamma+2\gamma^2)*\sqrt{(4+4\gamma+2\gamma^2)}}$
$\sigma_{12}^{gio}$	$\frac{4\gamma^3(1/2 \ln(\gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4})+1)-1/2 \ln(\gamma^2/\sqrt{\gamma^4+4}-1))}{(4+\gamma^2)\sqrt{(4-4\gamma+2\gamma^2)*\sqrt{(4+4\gamma+2\gamma^2)}}$

## Annexe B

# Détermination des déformations par corrélation d'image 3D

La corrélation d'image 3D permet la détermination de champs de déformation lors d'un procédé de mise en forme simple (emboutissage, gonflage). Les mesures effectuées dans cette étude sont réalisées à l'aide du logiciel Aramis®. Un marquage aléatoire, réalisé soit à l'aide de peinture ou par électrogravage, est appliqué sur la tôle. Tous les points, à l'échelle locale, sont considérés comme unique. Il est donc possible de reconnaître un même point du marquage à différents stades de déformations. En réalité, le logiciel Aramis divise le marquage en petits carrés, qu'il reconnaît grâce au niveau de gris. La procédure permettant la mesure de champ est la suivante :

- une image initiale, capturé par les deux caméras, est enregistrée. Cette configuration est prise comme référence et divisée en petits carrés, distingués les uns des autres par leur niveau de gris.
- la tôle est déformée selon le procédé choisi
- une image finale de la tôle déformée est enregistrée par les deux caméras, permettant une corrélation 3D. Le logiciel, à partir de points de départ indiqués par l'utilisateur, essaie d'associer les points du marquage à l'état initial et à l'état final. Pour ce faire, les notions de rotation, translation et distorsion doivent être prises en compte.

Pour permettre la détermination des déplacements des points du marquage entre l'état initial et l'état final, trois opérations de corrélation sont nécessaires entre les différents clichés des deux caméras (Fig. B.1). Les opérations de corrélations permettent de déterminer pour chaque speckle le gradient de la transformation  $[\mathbf{F}]$  subi par celui-ci. Les relations classiques de la mécanique permettent facilement de remonter aux déformations engendrées par le procédé sur la tôle.

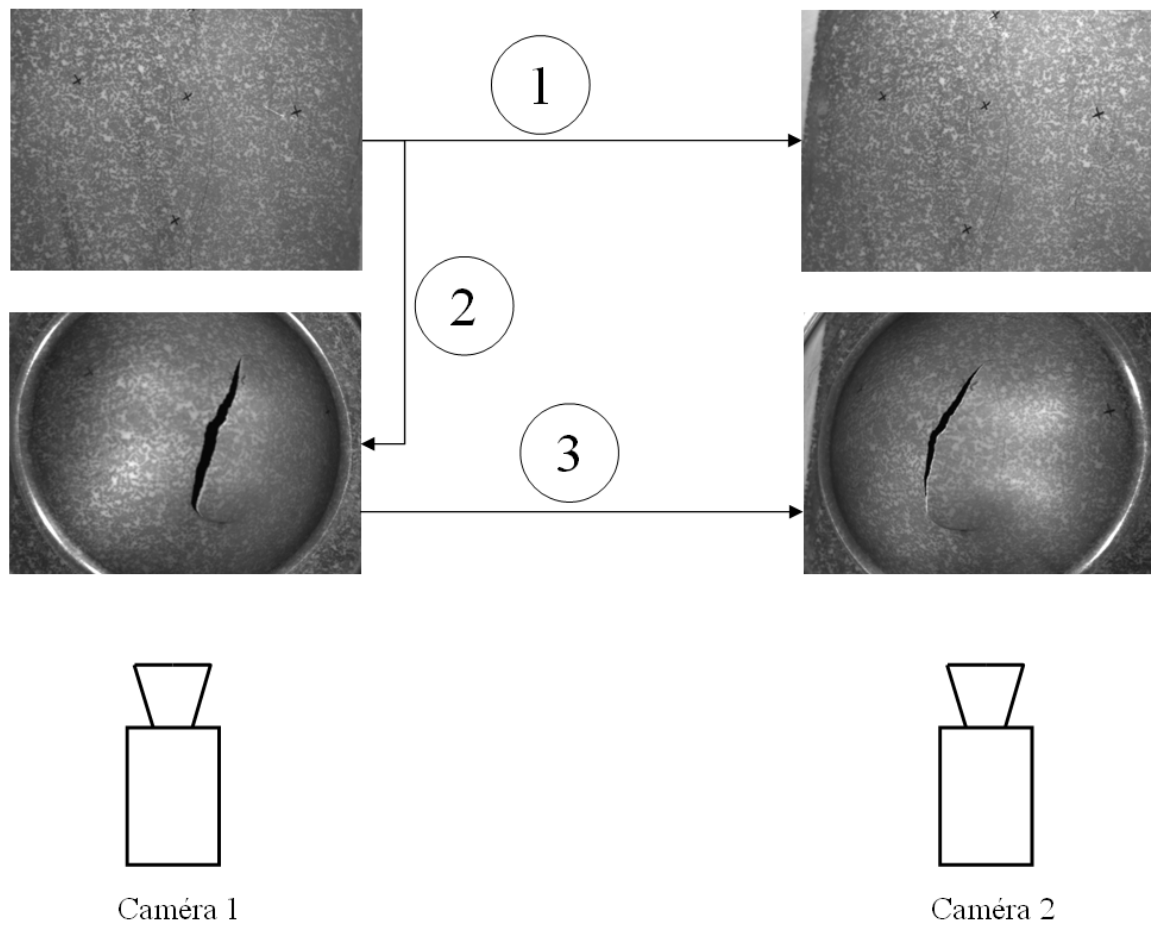


FIGURE B.1 – Corrélations d'image effectué par le logiciel Aramis en 3D

# Annexe C

## Récapitulatif des paramètres identifiés pour les critères de plasticité et les lois d'écrouissage

Cette annexe reprend toutes les identifications pour les stratégies d'identification définie dans le chapitre IV.

Réf	Critère	Base expérimentale	Paramètres
A	Hill	Tests de traction uniaxiale	$F, G, H, L, M, N$
B	Hill	Coefficient de Lankford	$F, G, H, L, M, N$
C	Cazacu	Tests de traction uniaxiale	$a, k, L_{ij}$
D	Cazacu	Traction + Lankford	$a, k, L_{ij}$
E	Cazacu	Tous les tests	$a, k, L_{ij}$

TABLE C.1 – Stratégie d'identification pour les critères de plasticité

Réf	Ecrouissage	Base expérimentale	Paramètres
I	Isotrope	Traction uniaxiale DL	$K, \epsilon_0, n$
II	Isotrope	Traction uniaxiale DL	$K, \epsilon_0, n; r, K_{sat}$
III	Isotrope anisotrope	Traction uniaxiale	$K_i, \epsilon_0^i, n_i$
IV	Isotrope + Cinématique	Traction uniaxiale DL + Bauschinger	$K, \epsilon_0, n, D, \psi$

TABLE C.2 – Stratégie d'identification pour les lois d'écrouissages



## C.1 Critères de plasticité

### *i* ) Critère de plasticité de Hill

$$f(\mathbf{S})^2 = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

### *ii* ) Critère de plasticité de Cazacu

$$f(\tilde{\mathbf{S}}) = \left( (|\tilde{S}_I| - k\tilde{S}_I)^a + (|\tilde{S}_{II}| - k\tilde{S}_{II})^a + (|\tilde{S}_{III}| - k\tilde{S}_{III})^a \right)^{1/a} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{33} \\ \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{23} \\ \tilde{S}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & & & \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & & & \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & & & \\ & & & L_{44} & & \\ & & & & L_{55} & \\ & & & & & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Coefficient	T40	SSAT 235
F	0,365	0,3384
G	0,612	0,6040
H	0,388	0,396
L=M=N	1,24	1,6139

TABLE C.3 – Identification du critère de plasticité de Hill par la stratégie A pour le T40 et le SSAT 235

Coefficient	T40	SSAT 350
F	0,144	0,260
G	0,299	0,578
H	0,701	0,422
L=M=N	2,23	1,70

TABLE C.4 – Identification du critère de plasticité de Hill par la stratégie B pour le T40 et le SSAT 350

### *iii* ) Paramètres identifiés au cours du manuscrit

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
T40	0,0004	-0,0003	-0,0003	0,8682	-0,0001	2,0624	0,9278	0,9451	0,9467
SSAT 350	0,0002	0	0,0004	0,7029	0,0001	1,1030	0,9126	1,0910	1,0509

TABLE C.5 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie C pour le T40 et le SSAT 350

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
T40	0,0038	-0,0047	0,0055	0,6270	-0,005	0,4501	0,8859	0,8859	0,8859
SSAT 350	0,0522	-0,0165	0,0295	0,4832	-0,0648	0,6679	0,8467	0,8467	0,8467

TABLE C.6 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie D pour le T40 et le SSAT 350

	$k$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
T40	0,0859	- 0,0064	-0,05	0,7360	- 0,04	0,4120	0,9684	0,9684	0,9684

TABLE C.7 – Identification du critère de plasticité de Cazacu par la stratégie E pour l'alliage T40.

## C.2 Lois d'écrouissage

### *i* ) Loi de Norton-Hoff

$$\sigma_y = \sqrt{3} * K(\epsilon_0 + \epsilon_p)^n \quad (\text{C.4})$$

### *ii* ) Loi adoucissante

$$\sigma_y = \sqrt{3} * K(\epsilon_0 + \epsilon_p)^n e^{-r\epsilon_p} + K_{sat}(1 - e^{-r\epsilon_p}) \quad (\text{C.5})$$

### *iii* ) Loi d'Arsmtrong-Frederick

$$[\dot{\mathbf{X}}] = D[\dot{\epsilon}^p] - \xi[\mathbf{X}]\dot{\epsilon}^p \quad (\text{C.6})$$

Paramètres	T40	SSAT235
$K$	439,50	682,44
$\epsilon_0$	1,57e <sup>-2</sup>	1,66e <sup>-3</sup>
$n$	0,155	0,074
Erreur	0,26	0,004

TABLE C.8 – Valeur des paramètres pour la modélisation de la loi d'écrouissage selon la stratégie I

Paramètres	T40	SSAT235
$K$	540,28	682,30
$\epsilon_0$	0,039	1,66e <sup>-3</sup>
$n$	0,263	0,073
$r$	1,83	0,311
$K_{sat}$	293,83	500,04
Erreur	0,083	0,0034

TABLE C.9 – Valeur des paramètres pour la modélisation de la loi d'écrouissage selon la stratégie II

### *vi* ) Paramètres identifiés au cours du manuscrit

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	439,49	392,18	346,5	335,3	321,6
$\epsilon_0$	0,0157	0,0145	0,015	0,021	0,013
$n$	0,154	0,133	0,099	0,1	0,08
Erreur	0,08	0,077	0,25	0,87	0,24

TABLE C.10 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi de Norton-Hoff) pour l'alliage T40 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie A

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	540,28	540,1	532,43	530,6	530,5
$\epsilon_0$	0,039	0,1	0,1	0,1	0,01
$n$	0,26	0,36	0,36	0,36	0,36
$r$	1,83	3,27	2,49	3,23	3,25
$K_{sat}$	293,83	293,5	227,25	213,1	213,0
Erreur	0,083	0,05	0,045	0,065	0,084

TABLE C.11 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi adoucissante) pour l'alliage T40 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie A

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	682,44	619,8	599,9	568,2	547,43
$\epsilon_0$	0,002	0,001	0,0002	0,0001	0,002
$n$	0,074	0,045	0,043	0,025	0,028
Erreur	0,004	0,023	0,043	0,02	0,025

TABLE C.12 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi de Norton-Hoff) pour l'alliage SSAT 350 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie A

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	682,30	666,9	602,9	918,71	746,21
$\epsilon_0$	0,002	0,002	0,0006	0,019	0,01
$n$	0,073	0,063	0,039	0,164	0,107
$r$	0,311	0,368	0,42	3,46	3,03
$K_{sat}$	500,04	0,658	228	215,38	213,02
Erreur	0,0034	0,014	0,02	0,004	0,006

TABLE C.13 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi adoucissante) pour l'alliage SSAT 350 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie A

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	439,49	443,96	410,048	389,19	338,47
$\epsilon_0$	0,0157	0,014	0,008	0,012	0,008
$n$	0,154	0,133	0,093	0,090	0,0755
Erreur	0,08	0,077	0,21	0,07	0,22

TABLE C.14 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi de Norton-Hoff) pour l'alliage T40 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	540,28	568,80	712,57	537,79	532,80
$\epsilon_0$	0,039	0,053	0,089	0,047	0,065
$n$	0,263	0,270	0,40	0,233	0,294
$r$	1,83	1,620	2,350	1,090	2,799
$K_{sat}$	293,83	284,38	227,11	212,83	213,75
Erreur	0,083	0,007	0,011	0,016	0,039

TABLE C.15 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi adoucissante) pour l'alliage T40 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	682,44	624,46	581,19	555,78	547,43
$\epsilon_0$	0,002	0,001	0,0003	0,002	0,01
$n$	0,074	0,045	0,031	0,0246	0,054
Erreur	0,004	0,02	0,03	0,019	0,04

TABLE C.16 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi de Norton-Hoff) pour l'alliage SSAT 350 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

Paramètres	0 °	30 °	45 °	60 °	90 °
$K$	682,30	666,99	821,26	918,71	749,21
$\epsilon_0$	0,002	0,002	0,01	0,019	0,01
$n$	0,073	0,063	0,122	0,171	0,126
$r$	0,311	0,368	2,64	3,59	3,84
$K_{sat}$	300,04	0,658	230	215,38	213,02
Erreur	0,0034	0,023	0,008	0,04	0,006

TABLE C.17 – Valeur des paramètres issue de la stratégie d'identification III (loi adoucissante) pour l'alliage SSAT 350 considérant une identification de la surface de plasticité par la stratégie B

	$K$	$\epsilon_0$	$n$	$D$	$\xi$
T40	451,83	0,007	0,163	4778,13	127,5

TABLE C.18 – Identification des lois d'écrouissage par la stratégie IV pour l'alliage de titane T40, dont l'écrouissage isotrope est modélisé par une loi de Norton-Hoff

	$K$	$\epsilon_0$	$n$	$r$	$K_{sat}$	$D$	$\xi$
T40	406,342	0,08	0,223	0,532	369,2	4471,25	93,0067

TABLE C.19 – Identification des lois d'écrouissage par la stratégie IV pour l'alliage de titane T40, dont l'écrouissage isotrope est modélisé par une loi adoucissante



# Bibliographie

- [Ackland07] G. Ackland, M. Mendeleev. *Development of an interatomic potential appropriate for simulation of phase transformation in zirconium*. Phil. Mag. Lett., vol. 87 :349, 2007.
- [Akerstrom06] P. Akerstrom. *Modelling and simulation of hot stamping*. Thèse de doctorat, University of Technology, Lulea, 2006.
- [Aliaga00] C. Aliaga. *Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- [Apel04] N. Apel. *Approaches to the Description of Anisotropic Material Behaviour at Finite Elastic and Plastic Deformations - Theory and Numerics -*. Thèse de doctorat, Institut für Mechanik, 2004.
- [Aranda04] L. G. Aranda. *Etude thermo-mécanique et modélisation numérique de l'emboutissage à chaud de l'Usibor 1500*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [Bahloul06] R. Bahloul, S. Ben-Elechi, A. Potiron. *Optimisation of spring-back predicted by experimental and numerical approach by using response surface methodology*. J. Mater. Process. Tech., vol. 173 :101–110, 2006.
- [Bairan06a] J. M. Bairan, A. R. Mari. *Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3d loading. part 1 : Theoretical formulation*. Comput. Struct., vol. 84 :2254–2263, 2006.
- [Bairan06b] J. M. Bairan, A. R. Mari. *Coupled model for the nonlinear analysis of sections made of anisotropic materials, subjected to general 3d loading. part 2 : Implementation and validation*. Comput. Struct., vol. 84 :2264–2276, 2006.



- [Banabic03a] D. Banabic, D. Comsa, L. Paraianu, G. Cosovici, P. Jurco. *Performances of the BBC2003 yield criterion when using data obtained from different mechanical tests*. In *International conference of MTeM, Cluj Napoca, Romania*. 2003.
- [Banabic03b] D. Banabic, T. Kuwabara, T. Balan, D. Comsa, D. Julean. *Non-quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions*. *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 45 :797–811, 2003.
- [Barlat89] F. Barlat, J. Lian. *Plastic behavior and stretchability of sheet metals - part II : a yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions*. *Int. J. Plasticity*, vol. 5 :51–66, 1989.
- [Barlat91] F. Barlat, D. L. J. Brem. *A six components yield function for anisotropic materials*. *Int. J. Plasticity*, vol. 7 :693–712, 1991.
- [Barlat97] F. Barlat, R. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung. *Yielding description for solution strengthened aluminum alloys*. *Int. J. Plasticity*, vol. 13 :385–401, 1997.
- [Barlat05] F. Barlat, H. Aretz, J. Yoon, M. Karabin, J. Brem, R. Dick. *Linear transformation-based anisotropic yield functions*. *Int. J. Plasticity*, vol. 21 :1009–1039, 2005.
- [Barlat07] F. Barlat, J. W. Yoon, O. Cazacu. *On the linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy*. *Int. J. Plasticity*, vol. 23 :876–896, 2007.
- [Battaini07] M. Battaini, E. Pereloma, C. Davies. *Orientation effect on mechanical properties of commercially pure titanium at room temperature*. *Mettall. Mater. Trans. A*, vol. 38A :276–285, 2007.
- [Boulila02] A. Boulila, M. Ayadi, A. Zghal, K. Jendoubi. *Validation expérimentale du modèle de calcul en calotte sphérique des plaques circulaires minces sous l'effet d'un gonflement hydraulique*. *Mécanique & Industries*, vol. 3 :627–638, 2002.
- [Bouvier05] S. Bouvier, J. Alves, M. Oliveira, L. Menezes. *Modelling of anisotropic work-hardening behaviour of metallic materials subjected to strain-path changes*. *Comput. Mater. Sci.*, vol. 32 :301–315, 2005.

- [Bouvier06a] S. Bouvier, B. Gardey, H. Haddadi, C. Teodosiu. *Characterization of the strain-induced plastic anisotropy of rolled sheets by using sequences of simple shear and uniaxial tensile tests*. J. Mater. Process. Tech., vol. 174 :115–126, 2006.
- [Bouvier06b] S. Bouvier, H. Haddadi, P. Lev  , C. Teodosiu. *Simple shear tests : Experimental techniques and characterization of the plastic anisotropy of rolled sheets at large strains*. J. Mater. Process. Tech., vol. 172 :96–103, 2006.
- [Castro04] C. Castro, C. Antonio, L. Sousa. *Optimisation of shape and process parameters in metal forging using the genetic algorithms*. J. Mater. Process. Tech., vol. 146 :356–364, 2004.
- [Cazacu03] O. Cazacu, F. Barlat. *Application of the theory of representation to describe yielding of anisotropic aluminum alloys*. Int. J. Eng. Sci., vol. 41 :1367–1385, 2003.
- [Cazacu06] O. Cazacu, B. Plunkett, F. Barlat. *Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals*. Int. J. Plasticity, vol. 22 :1171–1194, 2006.
- [Chaboche08] J. L. Chaboche. *A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories*. Int. J. Plasticity, vol. 24 :1642–1693, 2008.
- [Chen05] F. Chen, K. Chiu. *Stamping formability of pure titanium sheets*. J. Mater. Process. Tech., vol. 170 :181–186, 2005.
- [Chun02a] B. Chun, J. Jinn, J. Lee. *Modeling the baushinger effect for sheet metals, part I : theory*. Int. J. Plasticity, vol. 18 :571–595, 2002.
- [Chun02b] B. Chun, J. Jinn, J. Lee. *Modeling the baushinger effect for sheet metals, part II : Applications*. Int. J. Plasticity, vol. 18 :571–595, 2002.
- [Combres88] Y. Combres. *Etude du comportement superplastique des alliages de titane Ta6V et de nickel Nk17CDAT au moyen de l’essai de torsion*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1988.
- [Comsa07] D. Comsa, D. Banabic. *Numerical simulation of sheet metal forming using a new yield criterion*. Key Eng. Mat., vol. 344 :833–840, 2007.

- [Coupez] T. Coupez. *Stable stabilized finite element for 3d forming calculation*. CEMEF, Rapport interne (1996).
- [Delobelle96] P. Delobelle, P. Robinet, P. Geyer, P. Bouffieux. *A model to describe the anisotropic viscoplastic behaviour of zircaloy-4 tubes*. J. Nucl. Mater., vol. 238 :135–162, 1996.
- [Devine96] I. Devine. *Apport de la tribométrie et des essais sur presse pilote pour la simulation numérique de l’emboutissage des tôles d’acier nues et revêtues de zinc pur*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1996.
- [Duchêne08] L. Duchêne, T. Lelotte, P. Flores, S. Bouvier, A. M. Habraken. *Rotation of axes for anisotropic metal in fem simulations*. Int. J. Plasticity, vol. 24 :397–4427, 2008.
- [Dukto93] M. Dukto, D. Peric, D. Owen. *Universal anisotropic yield criterion based on superquadric functional representation : part 1. algorithm issues and accuracy analysis*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engn., vol. 109 :73–93, 1993.
- [Fayolle08] S. Fayolle. *Etude de la modélisation de la pose et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2008.
- [Ferron94] G. Ferron, R. Makkouk, J. Morreale. *A parametric description of orthotropic plasticity in metal sheets*. Int. J. Plasticity, vol. 10 :431–449, 1994.
- [Forestier04] R. Forestier. *Developpement d’une méthode d’identification de paramètres par analyse inverse couplée avec un modèle éléments finis 3D*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2004.
- [Fundenbergert97] J. J. Fundenbergert, M. J. Philippe, F. Wagner, C. Esling. *Modelling and prediction of mechanical properties for materials with hexagonal symmetry (zinc, titanium and zirconium alloys)*. Acta Mater., vol. 45 :4041–4055, 1997.
- [Gavrus96] A. Gavrus. *Identification automatique des paramètres rhéologiques par analyse inverse*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1996.

- [Gilormini93] P. Gilormini, P. Roudier, P. Rougee. *Les déformations cumu-  
lées tensorielles*. C.R. Acad Sci. Paris, vol. 316 :1499–1504,  
1993.
- [Grytten08] F. Grytten, B. Holmedal, O. Hopperstad, T. Børvik. *Evalua-  
tion of identification methods for yld2004-18p*. Int. J. Plasti-  
city, vol. 24 :2248–2277, 2008.
- [Guillemot00] F. Guillemot. *Etude métallurgique d’alliages de titane pour  
application biomédicales*. Thèse de doctorat, INSA Rennes,  
2000.
- [Haddag07] B. Haddag. *Contribution à la modélisation de la mise en forme  
des toles metalliques : Application au retour élastique et à la  
localisation*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale supérieures  
d’Arts et Métiers, 2007.
- [Hagège04] B. Hagège. *Simulation du comportement mecanique des mi-  
lieux fibreux en grandes transformations : Application aux ren-  
forts tricotés*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure  
d’Arts et Métiers de Paris, 2004.
- [Hakansson05] P. Hakansson, M. Wallin, M. Ristinmaa. *Comparison of iso-  
tropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity*.  
Int. J. Plasticity, vol. 21 :1435–1460, 2005.
- [Hall08] R. Hall. *Combined thermodynamics approach for anisotropic,  
finite deformation overstress models of viscoplasticity*. Int. J.  
Eng. Sci., vol. 46 :119–130, 2008.
- [Harrysson07a] M. Harrysson, A. Harrysson, M. Ristinmaa. *Spatial represen-  
tation of evolving anisotropy at large strains*. Int. J. Solids  
Struct., vol. 44 :3514–3532, 2007.
- [Harrysson07b] M. Harrysson, M. Ristinmaa. *Description of evolving aniso-  
tropy at large strains*. Mech. Mater., vol. 39 :267–282, 2007.
- [Hill48] R. Hill. *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic  
metals*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A,  
Mathematical and Physical Sciences, vol. 193 :281–297, 1948.
- [Hill90] R. Hill. *Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet  
metals*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 38 :405–417, 1990.

- [Hill93] R. Hill. *A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals*. Int. J. Mech. Sci., vol. 35 :19–25, 1993.
- [Holzapfel00] G. A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics : A continuum approach for engineering*. 1st ed. Wiley, 2000.
- [Hosford72] W. Hosford. *A general isotropic yield criterion*. J. Appl. Mech., vol. 39 :607–609, 1972.
- [Houillon09] M. Houillon. *Modélisation du procédé de fluotournage du tantale et du traitement thermique*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2009.
- [Héripuré07] E. Héripuré, M. Dexet, J. Crépin, L. Gélébart, A. Roos, M. Bornert, D. Caldemaison. *Coupling between experimental measurements and polycrystal finite element calculations for micromechanical study of metallic materials*. Int. J. Plasticity, vol. 23 :1512–1539, 2007.
- [Hu07a] W. Hu. *Constitutive modeling of orthotropic sheet metals by presenting hardening-induced anisotropy*. Int. J. Plasticity, vol. 23 :620–639, 2007.
- [Hu07b] W. Hu. *A novel quadratic yield model to describe the feature of multi-yield-surface of rolled sheet metals*. Int. J. Plasticity, vol. 23 :2004–2028, 2007.
- [int] [www.aluminium.malter.org.uk](http://www.aluminium.malter.org.uk). Site internet.
- [Jones98] D. Jones, M. Schonlau, W. Welsh. *Efficient global optimization of expensive black-box functions*. J. Global Optim., vol. 13 :455–492, 1998.
- [Jousset08] H. Jousset. *Viscoplasticité et microstructures d’un alliage de titane : Effets de la température et de la vitesse de déformation*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2008.
- [Karafillis93] A. Karafillis, M. Boyce. *A general anisotropic using bounds and a transformation weighting tensor*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 12 :1859–1886, 1993.
- [Kim07] D. Kim, F. Barlat, S. Bouvier, M. Rabahallah, T. Balan, K. Chung. *Non-quadratic anisotropic potentials based on linear transformation of plastic strain rate*. Int. J. Plasticity, vol. 23 :1380–1399, 2007.

- [Knockaert01] R. Knockaert. *Numerical and experimental study of the strain localization during sheet forming operations*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2001.
- [Kocks98] U. Kocks, C. Tomé, H. Wenk. *Texture and anisotropy*. Cambridge University Press, 1998.
- [Kuwabara01] T. Kuwabara, C. Katami, M. K. ans T. Shindo, T. Ohwue. *Cup drawing of pure titanium sheet - finite element analysis and expérimental validation*. Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications, pp. 781–787, 2001.
- [Kuziak98] R. Kuziak, Z. Malinowski, M. Pietrzyk. *Simulation of the heating of billets including the microstructure evolution and thermal stresses*. In *Proceding of AMT'98 on Advanced Materials and Technologies*, vol. 4, pp. 685–690. 1998.
- [Lebensohn96] R. A. Lebensohn, C. N. Tomé. *Yield loci calculation of hexagonal materials using a selfconsistent polycrystalline model*. Texture Microstruct., vol. 26-27 :513–529, 1996.
- [Lee08] M. Lee, K. Chung, R. Wagoner, Y. Keum. *A numerical method for rapid estimation of drawbead restraining force based on non-linear, anisotropic constitutive equations*. Int. J. Solids Struct., vol. 45 :3375–3391, 2008.
- [Lee09] M. Lee, S. Kim, R. Wagoner, K. Chung, H. Kim. *Constitutive modeling for anisotropic/asymmetric hardening behavior of magnesium alloy sheets : Application to sheet springback*. Int. J. Plasticity, vol. 25 :70–104, 2009.
- [Lei] B. Lei, J. Lecomte, C. Schuman, M. Philippe, C. Esling. *Study of plastic deformation in hexagonal metals : new developments*. Revue de projet.
- [Lemaitre98] J. Lemaitre, J. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. 2nd ed. Dunod, 1998.
- [Lia02] K. Lia, W. Carden, R. Wagoner. *Simulation of springback*. Int. J. Mech. Sci., vol. 44 :103–122, 2002.
- [Lissel06] L. Lissel. *Modeling the microstructural evolution during hot working of C-Mn and of Nb microalloyed steels using a physically based model*. Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology, 2006.

- [Lopez-Chipres07] Lopez-Chipres. *Hot flow behavior of boron microalloyed steels*. Mater. Sci. Eng. A, vol. 480 :49–55, 2007.
- [Lütjering07] G. Lütjering, J. Williams. *Titanium*. 2nd ed. Springer, 2007.
- [Malvern69] L. E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. 1st ed. Prentice-Hall, 1969.
- [Masson08] R. Masson. *New explicit expressions of the hill polarization tensor for general anisotropic elastic solids*. Int. J. Solids Struct., vol. 45 :757–769, 2008.
- [Massoni87] E. Massoni. *Modélisation numérique par éléments finis de l’emboutissage*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1987.
- [Mattiasson83] K. Mattiasson. *On the co-rotational finite element formulation for large deformation problems*. Thèse de doctorat, PHD Thesis Chalmers University of Technology, 1983.
- [Mattiasson08] K. Mattiasson, M. Sigvant. *An evaluation of some recent yield criteria for industrial simulations of sheet forming processes*. Int. J. Mech. Sci., vol. 50 :774–787, 2008.
- [Menezes00] L. Menezes, C. Teodosiu. *Three-dimensional numerical simulation of the deep-drawing process using solid finite elements*. J. Mater. Process. Tech., vol. 97 :100–106, 2000.
- [Meuwissen] M. Meuwissen. *Yield criteria for anisotropic elasto-plastic metals*. Internal report.
- [Mhenni] N. B. Mhenni, S. Bouvier, R. Brenner, H. Haddadi, B. Bacroix. *Caractérisation et modélisation du comportement mécanique d’alliages de titane polycristallin*. Revue de projet.
- [Mocellin99] K. Mocellin. *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud : étude du contact et calcul multigrille*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1999.
- [Monnet04] G. Monnet, B. Devincere, L. Kubin. *Dislocation study of prismatic slip systems and their interactions in hexagonal close packed metals : application to zirconium*. Acta Mater., vol. 52 :4317–4328, 2004.

- [Mori01] K. Mori, K. Katoh. *Finite element simulation of deep drawing of titanium sheet having high normal anisotropy*. Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications, pp. 775–779, 2001.
- [Nemat-Nasser99] S. Nemat-Nasser, W. Guo, J. Cheng. *Mechanical properties and deformation mechanisms of a commercially pure titanium*. Acta Mater., vol. 47 :3705–3720, 1999.
- [Paraianu03] L. Paraianu, D. Comsa, G. Cosovici, P. Jurco, D. Banabic. *An improvement of the BBC2000 yield criterion*. In *Proceedings of the ESAFORM 2003 Conference*. 2003.
- [Peng05] X. Peng, J. Cao. *A continuum mechanics based non orthogonal constitutive model for woven composite fabrics*. Compos. Part A-Appl. S., vol. 36 :859–874, 2005.
- [Pietrzyk98] M. Pietrzyk, Z. Kedzierski, J. Lenard. *Inverse analysis applied to the evaluation of rheological and microstructural parameters in hot forming steels*. Proceedings of NUMIFORM'98, vol. \* :163–168, 1998.
- [Pietrzyk02] M. Pietrzyk. *Through-process modelling of microstructure evolution in hot forming of steels*. J. Mater. Process. Tech., vol. 125 :53–62, 2002.
- [Plunkett07] B. Plunkett, O. Cazacu, R. Lebensohn, F. Barlat. *Elastic-viscoplastic anisotropic modeling of textured metals and validation using the taylor cylinder impact test*. Int. J. Plasticity, vol. 23 :1001–1021, 2007.
- [Plunkett08] B. Plunkett, O. Cazacu, F. Barlat. *Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals*. Int. J. Plasticity, vol. 24 :847–866, 2008.
- [Proust07] G. Proust, C. Tomé, G. Kaschner. *Modeling texture, twinning and hardening evolution during deformation of hexagonal materials*. Acta Mater., vol. 55 :2137–2148, 2007.
- [Qu05] J. Qu, Q. Jin, B. Xu. *Parameters identification for improved viscoplastic model considering dynamic recrystallization*. Int. J. Plasticity, vol. 21 :1267–1302, 2005.



- [Rabahallah09a] M. Rabahallah, T. Balan, F. Barlat. *Application of strain rate potentials with multiple linear transformations to the description of polycrystal plasticity*. Int. J. Solids Struct., vol. 48 :1966–1974, 2009.
- [Rabahallah09b] M. Rabahallah, T. Balan, S. Bouvier, B. Bacroix, F. Barlat, K. Chung, C. Teodosiu. *Parameter identification of advanced plastic strain rate potentials and impact on plastic anisotropy prediction*. Int. J. Plasticity, vol. 25 :491–512, 2009.
- [Raulot] J. Raulot, A. Poty, H. Xu, M. Philippe, C. Esling. *Dynamiques moléculaires des dislocations et comportement de matériaux anisotropes*. Revue de projet.
- [Roucoules01] M. Roucoules, M. Pietrzyk, P. Hodgson. *Analysis of work hardening and recrystallization during the hot working of steel using a statistically based internal variable*. Mater. Sci. Eng., vol. 339 :1–9, 2001.
- [Roux] E. Roux, P. Bouchard. *An efficient parallel global optimization base on kriging property : practical approach apply to material parameters identification*. Article soumis à Structural and Multidisciplinary Optimization.
- [Rusineck01] A. Rusineck, J. Klepaczko. *Shear testing of a sheet steel at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress*. Int. J. Plasticity, vol. 17 :87–115, 2001.
- [Salem03] A. Salem, S. Kalidindi, R. Doherty. *Strain hardening of titanium : role of deformation twinning*. Acta Mater., vol. 51 :4225–4237, 2003.
- [Salem05] A. Salem, S. Kalidindi, S. Semiatin. *Strain hardening due to deformation twinning in  $\alpha$ -titanium : Constitutive relations and crystal-plasticity modeling*. Acta Mater., vol. 53 :3495–3502, 2005.
- [Sansour06] C. Sansour, I. Karsaj, J. Soric. *A formulation of anisotropic continuum elastoplasticity at finite strain. part 1 : Modelling*. Int. J. Plasticity, vol. 22 :2346–2365, 2006.

- [Sansour07] C. Sansour, I. Karsaj, J. Soric. *On a formulation for anisotropic elastoplasticity at finite strains invariant with respect to the intermediate configuration*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 55 :2404–2426, 2007.
- [Simo05] J. Simo, R. Taylor. *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity*. Int. J. Numer. Methods Engrg, vol. 22 :649–670, 2005.
- [Soare08] S. Soare, J. W. Yoon, O. Cazacu. *On the use of homogeneous polynomials to develop anisotropic yield functions with applications to sheet forming*. Int. J. Plasticity, vol. 24 :915–944, 2008.
- [Szeliga06] D. Szeliga, J. Gawad, M. Pietrzyk. *Inverse analysis for identification of rheological and friction models in metal forming*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., pp. 6778–6798, 2006.
- [Szindler98] D. Szindler, M. Pietrzyk, R. Kuziak. *Estimation of rheological and friction parameters in hot forming processes as inverse problem*. Proceedings of the 4<sup>th</sup> international ESAFORM, vol. 1 :191–194, 1998.
- [Tahar04] M. B. Tahar, E. Massoni. *Use of the modified maximum force criterion for necking analysis during sheet bulging*. 10th international Metal Forming Conference 2004, pp. 229–234, 2004.
- [Tahar05] M. B. Tahar. *Contribution à l'étude de la simulation du procédé d'hydroformage*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2005.
- [Thuillier10] S. Thuillier, P. Manach, L. Menezes. *Occurence of the strain path changes in a two-stage deep drawing process*. J. Mater. Process. Tech., vol. 210 :226–232, 2010.
- [Titeux04] I. Titeux, Y. M. Li, K. Debray, Y. Guo. *Un algorithme efficace d'intégration plastique pour un matériau obéissant au critère anisotrope de hill*. C. R. Mecanique, vol. 332 :901–906, 2004.
- [Touache06] A. Touache. *Contribution à la caractérisation et à la modélisation de l'influence de la vitesse et de la température sur le comportement en découpage de tôles minces*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2006.

- [Velay06] V. Velay, G. Bernhart, L. Penazzi. *Cyclic behavior modeling of a tempered martensitic hot work tool steel*. Int. J. Plasticity, vol. 22 :459–496, 2006.
- [Verma07] R. K. Verma, A. Haldar. *Effect of normal anisotropy on spring-back*. J. of Mater. Process. Tech., vol. 190 :300–304, 2007.
- [Wang09] J. Wang, J. Hirth, C. Tome. *(-1012) twinning nucleation mechanisms in hexagonal-close-packed crystals*. Acta Mater., vol. 57 :5521–5530, 2009.
- [Yoon06] J. Yoon, F. Barlat, R. Dick, M. Karabin. *Prediction of six or eight ears in a drawn cup based on a new anisotropic yield function*. Int. J. Plasticity, vol. 22 :174–193, 2006.
- [Zaefferer03] S. Zaefferer. *A study of active deformation systems in titanium alloys : dependence on alloy composition and correlation with deformation texture*. Mater. Sci. Eng. A, vol. 344 :20–30, 2003.
- [Zhang02] Z. Zhang, D. Delagnes, G. Bernhart. *Anisothermal cyclic plasticity modeling of martensitic steels*. Int. J. Fatigue, vol. 24 :635–648, 2002.
- [Zhiying09] C. Zhiying, D. Xianghuai. *The gtn damage model based on hill’48 anisotropic yield criterion and its application in sheet metal forming*. Computational Materials Science, vol. 44 :1013–1021, 2009.

# Simulation du comportement mécanique des alliages de titane pour les procédés de mise en forme à froid

## Résumé :

Il est proposé, dans ce travail, un modèle de comportement mécanique anisotrope pour la mise en forme à froid des alliages de titane de type  $\alpha$  (structure hexagonale compacte). Le modèle élasto-plastique choisi se compose d'un écrouissage cinématique et isotrope et d'un critère de plasticité anisotrope. Parmi la littérature, deux critères ont été retenus et implémentés dans Forgeô, le critère de Hill, classiquement utilisé pour caractériser un comportement anisotrope et le critère de Cazacu, développé spécialement pour ces matériaux à structure hexagonale compacte. L'implémentation numérique de la formulation anisotrope dans un logiciel éléments finis intègre deux repères de travail, dont celui des axes d'anisotropie réactualisé par le gradient de la transformation au cours de la mise en forme. Un algorithme du retour radial, plus ou moins simple à mettre en œuvre selon le critère de plasticité envisagé, permet le calcul de l'incrément de contrainte. Les paramètres des lois de comportement sont identifiés selon plusieurs procédures à partir de bases de données expérimentales différentes afin de comparer l'efficacité de ces dernières pour la caractérisation d'alliages de titane. Cette base est obtenue à partir d'essais de traction uniaxiale, de cisaillement et de compression réalisés selon plusieurs directions de sollicitation par rapport à la direction de laminage. Des simulations, notamment de traction, de gonflage et d'emboutissage, permettent une discussion sur les modèles de comportement plastique envisagés, ainsi que sur les procédures d'identification utilisées. Une comparaison avec des cartographies de déformations, issues de mesures de champs, montre la bonne corrélation entre la simulation numérique et les tests expérimentaux pour les essais de gonflage. De plus, la prédiction numérique du formage des alliages de titane, modélisés par un critère de Cazacu, se distingue par une bonne appréciation des zones de localisation de déformation et des profils de cornes d'emboutissage. En conclusion, des pistes concernant l'application du modèle de comportement et son identification pour d'autres matériaux seront exposées.

## Mots clés :

Anisotropie, Plasticité, Mise en forme, Identification de paramètres, Simulation éléments finis, Alliages de titane

## Simulation of titanium alloys sheet cold forming

### Abstract:

In this paper, the mechanical behaviour of  $\alpha$ -titanium alloys is modelised for the cold forming processes. The elasto-plastic constitutive law is decomposed in an anisotropic plastic criterion, an isotropic hardening and a kinematic hardening. Two yield criteria have been implemented, the classical Hill 1948 criterion and a non quadratic criterion, which have been developed by Cazacu and her team, to model the plasticity of hexagonal closed packed materials. The implementation of this model in a finite element software switch between two bases, the equilibrium is calculated in a reference basis and the anisotropy axes define a local basis, updated by the deformation gradient. In this local basis, the stress increment is computed with a return mapping algorithm. Several identification procedures, based on different experimental values chosen among tension, compression or shear tests, allow defining all the parameters needed to model the elasto-plastic behaviour. Simulations of cold forming processes (bulging and deep drawing) have been done to validate this model and discuss about the best identification procedure. Numerical results are compared with experimental data, obtained from speckles analysis for bulging tests. Strain localisation and earing of deep-drawn cups are correctly predicted using a Cazacu yield criterion to model the plastic behaviour of  $\alpha$ -titanium alloys.

### Keywords:

Anisotropy, Plasticity, Sheet forming, Parameters identification, Finite element simulation, Titanium alloys

